«ΣΠΟΥΔΑΙ», Τόμος 42, Τεύχος Ιο, Πανεπιστήμιο Πειραιώς / «SPOUDAI», Vol. 42, No 1, University of Piraeus

# ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΕΨΕΩΝ: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΜΕ ΠΟΙΟΤΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΣΤΙΣ ΚΟΙΝΩΝΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ (REVIEW ARTICLE)

Των
*Γρηγόρη Κιοσέογλου* και *Ανδρέα Δημητρίου*
Τμήμα Φιλοσοφίας, Παιδαγωγικής και Ψυχολογίας
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

## Abstract

The Prediction Analysis method gives a satisfactory answer to the problem of evaluation of prediction models with qualitative data. It is therefore a useful methodological aid for the social researcher dealing with this kind of models. In this paper we present the basic principles of this statistical method and give examples from the domain of behavioral sciences. We develop prediction models including one dependent and one or two independent variables. We also propose software enabling one to apply the method using the computer.

## 1. Περίληψη

Η μέθοδος της Ανάλυσης Προβλέψεων δίνει ικανοποιητική απάντηση στο πρόβλημα της αξιολόγησης μοντέλων πρόβλεψης με ποιοτικά δεδομένα. Αποτελεί συνεπώς χρήσιμο μεθοδολογικό βοήθημα στον ερευνητή των κοινωνικών επιστημών που επεξεργάζεται τέτοιου είδους μοντέλα. Στην εργασία αυτή επιχειρείται η παρουσίαση των βασικών αρχών της στατιστικής αυτής μεθόδου και γίνεται αναφορά σε παραδείγματα από το χώρο των επιστημών συμπεριφοράς. Αναπτύσσονται οι περιπτώσεις μοντέλων πρόβλεψης που περιλαμβάνουν μία εξαρτημένη μεταβλητή και μία ανεξάρτητη όπως επίσης και μοντέλων με μία εξαρτημένη μεταβλητή και δύο ανεξάρτητες. Προτείνεται επίσης λογισμικό που επιτρέπει την εφαρμογή των βασικών δυνατοτήτων της μεθόδου μέσω Η/Υ.

## 2. Συνάφεια και Πρόβλεψη

Η έννοια της στατιστικής πρόβλεψης είναι γνωστή από πολύ παλιά. Κατά καιρούς προτάθηκαν διάφορες μέθοδοι που αποσκοπούσαν στον έλεγχο των προβλέψεων που οι ερευνητές μπορούν να έχουν σχετικά με τα δεδομένα τους. Παλαιότερα αυτές αφορούσαν κυρίως την επεξεργασία ποσοτικών μεταβλητών. Σχετικώς πρόσφατα παρουσιάστηκαν μέθοδοι που προσπαθούν να επιτύχουν πρόβλεψη με το χειρισμό ποιοτικών μεταβλητών.

Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι η παρουσίαση των βασικών στοιχείων μίας γενικής μεθόδου που ονομάζεται Ανάλυση Προβλέψεων (ΑΠ) (Hildebrand, Laing και Rosenthal, 1977). Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση προτάσεων με τις οποίες επιχειρείται πρόβλεψη των κατηγοριών (καταστάσεων) μίας ποιοτικής μεταβλητής από μία ή περισσότερες άλλες ποιοτικές μεταβλητές.

Ας σημειωθεί ότι θα αναφερθούμε σε μοντέλα πρόβλεψης που διατυπώνονται από τον ερευνητή a priori. Είναι δηλαδή μοντέλα που προκύπτουν από κάποια θεωρία η οποία κατευθύνει τη συλλογή των δεδομένων. Επομένως ο έλεγχος αποσκοπεί να μετρήσει, με βάση τα δεδομένα, την εγκυρότητα της διατυπωθείσας πρόβλεψης. Πριν προχωρήσουμε σε μία πιο αναλυτική παρουσίαση θα κάνουμε μία πολύ σύντομη αναφορά σε μερικά από τα σημαντικότερα μέτρα συνάφειας και πρόβλεψης για ποιοτικές μεταβλητές.

Η ανάγκη για την αξιολόγηση της συνάφειας κυρίως αλλά και της πρόβλεψης μεταξύ ποιοτικών μεταβλητών οδήγησαν στην κατασκευή διαφόρων δεικτών που στόχευαν προς αυτήν την κατεύθυνση. Ο έλεγχος χ-τετράγωνο (Pearson, 1904) χρησιμοποιείται για την διαπίστωση πιθανής αλληλεξάρτησης μεταξύ ποιοτικών μεταβλητών. Ωστόσο, δεν αποτελεί μέτρο για το βαθμό της συνάφειας. Για το λόγο αυτό έγινε προσπάθεια να κατασκευαστούν μέτρα συνάφειας που στηρίζονται στον έλεγχο x-τετράγωνο, όπως ο συντελεστής φ για πίνακες συνάφειας 2x2, ο συντελεστής συνάφειας C (Pearson, 1904), ο συντελεστής T του Tschuprow (cf. Bishop, Fienberg and Holland, 1975) και ο συντελεστής V του Cramer (Cramer, 1946) για πίνακες IxJ. Το κύριο μειονέκτημα αυτών των μέτρων είναι ότι δεν είναι εύκολο να ερμηνευτούν με ακρίβεια ως προς τη σχέση που συνδέει τις υπό εξέταση μεταβλητές. Κυρίως όμως δεν επιτρέπουν πρόβλεψη. Το ίδιο ισχύει και για ανάλογους δείκτες που δεν βασίζονται στο x-τετράγωνο, όπως ο δείκτης Q (Yule, 1912) ή ο $r_n$ (Ives and Gibbons, 1967) για πίνακες 2x2.

Για μεταβλητές που μετρούνται σε τακτική κλίμακα επισημαίνουμε τον δείκτη gamma G (Goodman and Kruskal, 1954, 1959, 1963) και τον συντελεστή συσχέτισης του Spearman. Οι δείκτες όμως αυτοί δεν επιτρέπουν τον προσδιορισμό του βαθμού μίας μη-μονότονης σχέσης μεταξύ των δύο μεταβλητών.

Όσον αφορά την προσπάθεια πρόβλεψης μίας ποιοτικής μεταβλητής από μία άλλη, θα αναφέρουμε τον δείκτη λ (Goodman and Kruskal, 1954, 1959, 1963). Ο δείκτης αυτός εφαρμόζεται σε δεδομένα που βρίσκονται υπό τη μορφή ενός πίνακα συνάφειας Υ χ Χ και δίνει την σχετική μείωση των σφαλμάτων που γίνονται κατά την πρόβλεψη της Υ λαμβάνοντας υπόψη (θεωρώντας γνωστή) την Χ. Ο λ επιτρέπει την πρόβλεψη μόνο μίας κατηγορίας της Υ για κάθε κατηγορία της Χ. Οι δυνατές τιμές του κυμαίνονται από 0 έως 1. Όταν οι μεταβλητές Υ και Χ είναι στατιστικά ανεξάρτητες τότε λ= 0. Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε καθόλου αναλογική μείωση των σφαλμάτων κατά την πρόβλεψη της Υ θεωρώντας γνωστή την Χ. Δηλαδή η Χ δεν συμμετέχει καθόλου στην πρόβλεψη της Υ. Όταν λ= 1 έχουμε τέλεια πρόβλεψη της Υ από την Χ. Ο δείκτης λ είναι ασυμμετρικός. Τούτο σημαίνει ότι δίνει διαφορετική τιμή όταν χρησιμοποιήσουμε την Χ σαν εξαρτημένη μεταβλητή και την Υ σαν ανεξάρτητη. Η χρηστικότητα του δείκτη λ περιορίζεται —όπως ήδη αναφέρθηκε— από το γεγονός ότι κάθε κατηγορία της ανεξάρτητης μεταβλητής μπορεί να προβλέψει μόνο μία (και όχι περισσότερες) κατηγορίες της εξαρτημένης. Μειονέκτημα είναι επίσης το γεγονός ότι δεν παρέχει στον ερευνητή τη δυνατότητα να καθορίσει τη μορφή της πρόβλεψης του a priori.

Ένας άλλος δείκτης που αποτελεί εναλλακτική επιλογή για το λ είναι ο δείκτης αναλογικής πρόβλεψης τ (Goodman and Kruskal). Ο τ έχει ιδιότητες παρόμοιες με τον λ και τα ίδια με αυτόν μειονεκτήματα. Οι δείκτες λ και τ εφαρμόζονται σε ονομαστικές μεταβλητές. Για μεταβλητές σε τακτική κλίμακα αναφέρουμε τον ασυμμετρικό δείκτη d (Somers, 1962) που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σκοπό παρόμοιο με αυτόν του δείκτη λ. Ολοκληρώνοντας αυτήν την σύντομη αναφορά πρέπει να μνημονεύσουμε τη μέθοδο των λογαριθμικών γραμμικών μοντέλων. Αυτή εφαρμόζεται κυρίως σε πολυδιάστατους πίνακες συνάφειας για την μελέτη της φύσης της συσχέτισης μεταξύ πολλών ποιοτικών μεταβλητών (Bishop, Fienberg and Holland, 1975).

## 3. Ανάλυση Προβλέψεων

Η μέθοδος που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια προϋποθέτει την ύπαρξη μίας μόνο εξαρτημένης μεταβλητής καί μίας ή περισσοτέρων ανεξαρτήτων.

### 3.1. **Δισδιάστατη** πρόβλεψη

Θα αναφερθούμε καταρχήν στην περίπτωση κατά την οποία υπάρχει μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή. Η περίπτωση αυτή αναφέρεται και ως δισδιάστατη πρόβλεψη. Έστω πίνακας συνάφειας του οποίου οι γραμμές R αποτελούν τις κατηγορίες μίας ποιοτικής μεταβλητής Υ και οι στήλες C τις κατηγορίες μιας δεύτερης ποιοτικής μεταβλητής Χ. Ένας τέτοιος πίνακας περιέχει συνεπώς κυψέλες RxC, Στον πίνακα αυτόν ορίζονται αφ' ενός οι πιθανότητες p(i, j) με τις οποίες τα «άτομα» του πληθυσμού ανήκουν στις διάφορες κυψέλες και αφ' οι περιθωριακές πιθανότητες p(i.) και p(.jετέρου ). Είναι γνωστό ότι οι μεταβλητές Υ και Χ είναι στατιστικά ανεξάρτητες αν ισχύει:

$$p(i, j) = p(i.) \cdot p(.j) \tag{1}$$

Στην ΑΠ μία συγκεκριμένη πρόβλεψη μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση στοιχείων παρόμοιων με αυτά της άλγεβρας της λογικής. Εξάλλου μπορεί να οριστεί τελείως με καθορισμό αφ' ενός του πεδίου ορισμού και αφ' ετέρου των κυψελών σφάλματος στον πίνακα συνάφειας Υ x Χ. Οι κυψέλες σφάλματος είναι αυτές στις οποίες σύμφωνα με τις υποθέσεις του ερευνητή, δεν υλοποιείται η πρόβλεψη (η κατηγορία x της Χ δεν προβλέπει την κατηγορία y της Υ). Σε μία επιτυχημένη πρόβλεψη στις κυψέλες αυτές αναμένεται οι ποσότητες p(i, j) να είναι πολύ μικρές και σε μία ιδανική πρόβλεψη να είναι μηδέν.

Έστω για παράδειγμα ότι η ανεξάρτητη είναι η Χ με τρεις κατηγορίες ($x_1$ $x_2$ $x_3$) ενώ η Υ είναι η εξαρτημένη με τρεις και αυτή κατηγορίες ($y_1$ $y_2$ $y_3$). Η πρόβλεψη ήταν ότι η κατηγορία $x_1$ προβλέπει την $y_3$, η κατηγορία $x_2$ την κατηγορία $y_2$ ή την $y_3$, και τέλος ότι η $x_3$ προβλέπει την $y_1$. Η παραπάνω πρόβλεψη συμβολίζεται P(ΥΧ) και μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$P\text{: } x_1 \rightarrow y_3,\ x_2 \rightarrow (y_2 \text{ ή } y_3)\ \&\ x_3 \rightarrow y_1$$

όπου ο συμβολισμός $x \rightarrow y$ σημαίνει «το x προβλέπει το y» ενώ με «ή», «&» συμβολίζονται αντίστοιχα η διάζευξη και η σύζευξη.

Στον πίνακα 1 φαίνεται το σύνολο των κυψελών σφάλματος με τις οποίες ορίζεται επίσης η διατυπωθείσα πρόβλεψη.

Μπορούμε να δηλώσουμε ότι το ζεύγος (y, x) είναι μία από τις κυψέλες σφάλματος δίνοντας στον δείκτη των κυψελών σφάλματος ω(i, j) την τιμή 1 ενώ ότι δεν είναι δίνοντας την τιμή O ([1]). Στο παράδειγμα μας θα είναι: ω(I, I) =

1. Γενικά ο δείκτης των κυψελών σφάλματος ω(i, j) μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα [0, 1]. Πρέπει να επισημανθεί όμως ότι με εξαίρεση των ακραίων τιμών 1 (για τις κυψέλες σφάλματος) και 0 (για τις υπόλοιπες), οι άλλες τιμές είναι γενικά αυθαίρετες. Συνηθέστερα χρησιμοποιείται η τιμή 0.5 για να δηλώσει κυψέλες σφάλματος με μικρότερο βαθμό αυστηρότητας σφάλματος από αυτές με τιμή 1. Στις κυψέλες αυτές δεχόμαστε την ύπαρξη ορισμένων «ατόμων».

$\omega(1, 2) = \omega(2, 1) = \omega(2, 3) = \omega(3, 3) = 1$ και για όλες τις άλλες κυψέλες $\omega(i, j) = 0$.

Κατόπιν αυτών έστω

$$K = \{ \sum_i \sum_j \omega(i, j)\, p(i, j) \mid i = 1..R,\ j = 1..C \}$$

η πιθανότητα με την οποία τα «άτομα» του πληθυσμού βρίσκονται στις κυψέλες σφάλματος και

$$U = \{ \sum_i \sum_j \omega(i, j)\, p(i.)\, p(.j) \mid i = 1..R,\ j = 1..C \} \qquad (2)$$

η πιθανότητα με την οποία τα «άτομα» θα αναμέναμε να βρίσκονται στις κυψέλες σφάλματος αν υπήρχε στατιστική ανεξαρτησία μεταξύ Y και X αν δηλαδή κατά την πρόβλεψη της μίας μεταβλητής καμιά απολύτως συνεισφορά δεν είχε η άλλη.

Το προτεινόμενο μέτρο για την επιτυχία της πρόβλεψης στον πληθυσμό δίνεται (Hildebrand et al., 1977) από

$$\nabla = \frac{U - K}{U} = 1 - \frac{K}{U} \qquad (3)$$

Το μέτρο αυτό αναφέρεται στην λεγόμενη αναλογική μείωση των σφαλμάτων (proportional reduction in error - PRE). Δίνει τον λόγο της μείωσης των σφαλμάτων («ατόμων» στις κυψέλες σφάλματος) που γίνονται κατά την πρόβλεψη της μίας μεταβλητής λαμβάνοντας υπόψη την πληροφορία της άλλης, προς τα σφάλματα που θα αναμέναμε να υπήρχαν αν οι δύο μεταβλητές ήταν στατιστικά ανεξάρτητες. Το $\nabla$ έχει εύρος δυνατών τιμών από $-\infty$ ως $+1$. Η τιμή 0 αποκτάται όταν $K = U$. Δηλαδή (βλ. τύπος 1) όταν οι μεταβλητές Y και X είναι ανεξάρτητες (το αντίθετο ισχύει μόνο για 2x2 πίνακες). Η τιμή +1 αποκτάται όταν έχουμε ιδανική πρόβλεψη δηλαδή όταν $p(i, j) = 0$ για το σύνολο των κυψελών σφάλματος. Πρέπει να τονιστεί ότι το μέτρο $\nabla$, είναι από κατασκευής του συμμετρικό δηλαδή δίνει την ίδια τιμή άσχετα με το ποιά μεταβλητή από τις Y και X χαρακτηριστεί εξαρτημένη και ποιά ανεξάρτητη.

Από τον τύπο (3) φαίνεται ότι το μέτρο αυτό δεν ορίζεται όταν δεν υπάρχουν καθόλου κυψέλες σφάλματος, γιατί τότε θα είναι $\nabla = 1-0/0$. Επίσης το $\nabla$ δεν ορίζεται όταν $U = 0$. Αυτή η περίπτωση συμβαίνει και όταν για κάθε κυψέλη σφάλματος, (i, j) οι περιθωριακές πιθανότητες p(i.) ή p(.j) ισούνται με 0. Όταν το $\nabla$ δεν ορίζεται η πρόταση για την συγκεκριμένη πρόβλεψη χαρακτηρίζεται μη αποδεκτή.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι όσο η τιμή του $V$ είναι πλησιέστερη προς την τιμή +1 τόσο η πρόβλεψη είναι επιτυχέστερη διότι έχουμε μεγάλη αναλογική μείωση των σφαλμάτων με βάση το μοντέλο πρόβλεψης. Αρνητική τιμή του V δηλώνει ότι η πιθανότητα σφάλματος βάσει του προτεινόμενου μοντέλου είναι μεγαλύτερη από αυτήν που θα είχαμε θεωρώντας ανεξάρτητες τις δύο μεταβλητές όταν δηλαδή στην πρόβλεψη της μίας μεταβλητής καμία απολύτως συνεισφορά δεν έχει η άλλη. Αυτό μεταφράζεται σε πλήρη αποτυχία του προτεινόμενου μοντέλου πρόβλεψης.

Η ποσότητα U αποτελεί ένα μέτρο για την λεγόμενη ακρίβεια της πρόβλεψης. Μεγάλη τιμή του U φανερώνει ότι αν υπήρχε ανεξαρτησία μεταξύ Y και X, τότε η πιθανότητα να υπήρχαν «άτομα» του πληθυσμού στις κυψέλες σφάλματος θα ήταν μεγάλη. Είναι φανερό ότι η τιμή του U αυξάνει γενικά με το πλήθος των κυψελών σφάλματος. Αν ένα μοντέλο περιλαμβάνει μεγάλο πλήθος κυψελών σφάλματος, κάθε κατηγορία της ανεξάρτητης μεταβλητής X προβλέπει γενικά μικρό αριθμό κατηγοριών της εξαρτημένης Y. Αυτό σημαίνει ότι η πρόβλεψη γίνεται με μεγαλύτερη ακρίβεια. Συνεπώς είναι σημαντικό σε μία πρόβλεψη να έχουμε υψηλή τιμή για το U όπως φυσικά και για το V'. Αυτή η παρατήρηση πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ειδικά όταν γίνεται αξιολόγηση περισσοτέρων του ενός μοντέλων πρόβλεψης για το ίδιο σύνολο δεδομένων.

### 3.2. Στατιστικοί έλεγχοι

Συνήθως, αντί όλου του πληθυσμού περιοριζόμαστε σε κάποιο αντιπροσωπευτικό δείγμα μεγέθους N. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε τον εκτιμητή $\hat{V}$ του V. Αυτός υπολογίζεται βάσει του τύπου (3) με την αντικατάσταση των πιθανοτήτων p(i, j), p(i.), p(.j) με τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες f(i, j), f(i.) και f(.j).

Ένας συνήθης στατιστικός έλεγχος αφορά τη μηδενική υπόθεση

$$Ho : V = 0$$

δηλαδή ότι δεν έχουμε καμία αναλογική μείωση των σφαλμάτων κάτω από το επιλεχθέν μοντέλο πρόβλεψης. Ο έλεγχος γίνεται βάσει του στατιστικού

$$Z = \frac{\hat{V}}{\sqrt{\text{εκτ. var}\,(\hat{V})}} \tag{4}$$

όπου στον παρανομαστή του κλάσματος, η εκτιμούμενη διακύμανση του V δίνεται από την σχέση Ι του παραρτήματος με αντικατάσταση φυσικά των άγνωστων πιθανοτήτων από τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες.

Ο έλεγχος αυτός γίνεται με βάση τις κρίσιμες τιμές της N (0, 1). Ας σημειωθεί ότι στην ΑΠ είναι επιτρεπτό (αντίθετα με τον έλεγχο $x^2$) να υπάρχουν στις διάφορες κυψέλες του πίνακα συνάφειας πολύ μικρές ή και μηδενικές τιμές.

Στατιστικοί έλεγχοι μπορεί επίσης να πραγματοποιηθούν στις εξής περιπτώσεις:

α) Όταν διαθέτουμε δύο διαφορετικά και ανεξάρτητα δείγματα και ένα μόνο μοντέλο πρόβλεψης που ισοδυναμεί ως συνήθως με κάποιο σύνολο από κυψέλες σφάλματος είναι δυνατό να ελέγξουμε την υπόθεση της ισότητας των δύο μέτρων επιτυχούς πρόβλεψης V και V΄ (Ho : V = V΄) όπου το καθένα από αυτά αντιστοιχεί στο κάθε δείγμα χωριστά. Ο έλεγχος αυτός πραγματοποιείται με το εξής στατιστικό

$$Z = \frac{\hat{V} - \hat{V}'}{\sqrt{\text{εκτ. var}\,(\hat{V}) + \text{εκτ. var}\,(\hat{V}')}}$$

και με χρήση των κρίσιμων τιμών της N (0, 1). Οι εκτιμήσεις των var $(\hat{V})$ και var $(\hat{V}')$ γίνονται πάλι βάσει του τύπου Ι του παραρτήματος και χρήση των σχετικών συχνοτήτων αντί των άγνωστων πιθανοτήτων.

β) Όταν έχουμε ένα μόνο δείγμα και θέλουμε να συγκρίνουμε δύο διαφορετικές προβλέψεις (που ορίζονται με δύο διαφορετικά σύνολα κυψελών σφάλματος) είναι ιδιαίτερα χρήσιμος ο έλεγχος της ισότητας των μέτρων V και V΄ (Ho : V = V΄) τα οποία αντιστοιχούν στα δύο διαφορετικά μοντέλα πρόβλεψης.

Ο στατιστικός αυτός έλεγχος γίνεται χρησιμοποιώντας το στατιστικό

$$Z = \frac{\hat{V} - \hat{V}'}{\sqrt{\text{εκτ. var}\,(\hat{V} - \hat{V}')}} \qquad (5)$$

όπου για την εκτίμηση της var $(\hat{V} - \hat{V}')$ εφαρμόζεται και πάλι ο τύπος Ι του παραρτήματος (με χρησιμοποίηση φυσικά των αντίστοιχων σχετικών συχνοτήτων αντί των πιθανοτήτων) όπου όμως οι ποσότητες α(i, j) αντικαθίστανται από τις διαφορές

$$\alpha(i, j) - \alpha'(i, j)$$

Το κάθε μέρος αυτών των διαφορών αντιστοιχεί στις δύο ξεχωριστές προβλέψεις που έχουν μέτρα επιτυχούς πρόβλεψης $\nabla$ και $\hat{\nabla}'$ και ακρίβειας U και U΄ αντίστοιχα.

## 3.3. Τεχνική της αποσύνθεσης

΄Οταν έχουμε δύο μοντέλα πρόβλεψης σε ένα δείγμα, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί ειδική τεχνική που επιτρέπει τη σύγκριση των δύο αυτών μοντέλων με στόχο την επιλογή του καλύτερου. Η τεχνική αυτή ονομάζεται τεχνική της αποσύνθεσης. Είναι χρήσιμη στην περίπτωση κατά την οποία ένα από τα δύο μοντέλα παρουσιάζει μεγαλύτερη τιμή στο μέτρο για την επιτυχία της πρόβλεψης από το άλλο μοντέλο, έχει όμως μικρότερη τιμή ακρίβειας. ΄Εστω $\nabla$ και U το μέτρο για την επιτυχία της πρόβλεψης και η ακρίβεια του πρώτου μοντέλου πρόβλεψης ενώ $\nabla'$ και U΄ οι αντίστοιχες ποσότητες για το δεύτερο μοντέλο. Επιπλέον ας είναι E και E΄ τα σύνολα των κυψελών σφάλματος στα δύο μοντέλα. ΄Εστω τέλος E+ οι κυψέλες σφάλματος που ανήκουν στο E΄ αλλά όχι στο E και E- οι κυψέλες σφάλματος που ανήκουν στο E αλλά δεν ανήκουν στο E΄. Συμβολίζουμε $\nabla(+)$ και U(+) το μέτρο για την επιτυχία της πρόβλεψης και την ακρίβεια που αντιστοιχούν στο E+ ενώ με $\nabla(-)$ και U(-) τις αντίστοιχες ποσότητες για το E-. Αποδεικνύεται (Hildebrand et al., 1977) ότι

$$\nabla' = \frac{1}{U'} [\nabla U + \nabla(+)\, U(+) - \nabla(-)\, U(-)]$$

Η παραπάνω σχέση αποκτά ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον στην περίπτωση κατά την οποία το E είναι γνήσιο υποσύνολο του E΄ οπότε και απλοποιείται ως εξής:

$$\nabla' = \frac{1}{U'} [\nabla U + \nabla(+)\, U(+)] \tag{6}$$

Αυτό που έχει σημασία στον τύπο αυτό είναι ο υπολογισμός του $\nabla(+)$ που εκφράζει την αξία της πρόβλεψης του μοντέλου που έχει σαν σύνολο κυψελών σφάλματος το E+ δηλαδή το σύνολο των επιπλέον κυψελών σφάλματος. Σε εφαρμογή που παρατίθεται παρακάτω θα δειχθεί η χρησιμοποίηση αυτής της τεχνικής.

## 4. Τρισδιάστατη πρόβλεψη

Στην περίπτωση αυτή αναφερόμαστε όταν η ΑΠ περιλαμβάνει δύο ανεξάρτητες μεταβλητές. Έστω Y η εξαρτημένη μεταβλητή με κατηγορίες R, X η πρώτη ανεξάρτητη μεταβλητή με κατηγορίες C και W η δεύτερη ανεξάρτητη μεταβλητή με κατηγορίες S. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι λογικοί συνδυασμοί ($X = x_j$ & $W = w_k$) όπου $j = 1...C$ και $k = 1..S$ αποτελούν κατηγορίες μίας νέας ανεξάρτητης μεταβλητής Z. Η πρόβλεψη αφορά τις κατηγορίες της Y για κάθε κατηγορία (ζεύγος) ($x_j$, $w_k$) της Z και συμβολίζεται P(YXW). Η έννοια και χρήση των κυψελών σφάλματος παραμένει η ίδια όπως στην περίπτωση δύο μεταβλητών.

Ας δούμε το εξής παράδειγμα. Έστω ότι οι μεταβλητές Y, X και W έχουν η κάθε μία τους δύο κατηγορίες και η πρόβλεψη είναι:

$$
\begin{aligned}
P :\ & x_1 \ \& \ w_1 \rightarrow (y_1 \text{ ή } y_2) \\
& x_1 \ \& \ w_2 \rightarrow y_1 \\
& x_2 \ \& \ w_1 \rightarrow y_2 \\
& x_2 \ \& \ w_2 \rightarrow y_1
\end{aligned}
$$

Η παραπάνω πρόβλεψη περιγράφεται και ως εξής με τη χρήση των κυψελών σφάλματος (Πίνακας 2).

Ο δείκτης των κυψελών σφάλματος ω(i, j, k) παίρνει στην περίπτωση αυτή τις εξής τιμές: $\omega(2, 1, 2) = \omega(1, 2, 1) = \omega(2, 2, 2) = 1$ και $\omega(i, j, k) = 0$ αλλού.

Επεκτείνοντας την περίπτωση των δύο μεταβλητών συμβολίζουμε με p(i, j, k) τις πιθανότητες με τις οποίες τα «άτομα» του πληθυσμού ανήκουν στις διάφορες κυψέλες του πίνακα συνάφειας. Υπάρχουν επίσης οι περιθωριακές πιθανότητες από τις οποίες αναφέρουμε μόνο τις

p(i..), p(.j.), p(.jk), p(ij.) και οι οποίες ορίζονται ως εξής:

$$p(i..) = \sum_j \sum_k p(i, j, k) \quad p(.j.) = \sum_i \sum_k p(i, j, k)$$

$$p(.jk) = \sum_i p(i, j, k) \quad p(ij.) = \sum_k p(i, j, k)$$

Κατόπιν αυτών ένα μέτρο για την επιτυχία της τρισδιάστατης πρόβλεψης στον πληθυσμό δίνεται από

$$\nabla\,(YXW) = 1 - \frac{\sum_i \sum_j \sum_k \omega\,(i, j, k)\; p\,(i, j, k)}{\sum_i \sum_j \sum_k \omega\,(i, j, k)\; p\,(i\,..)\; p\,(.jk)} \qquad (7)$$

όπου i= 1...R, j= 1..C, k= 1..S

Αυτό το μέτρο PRE έχει τις ίδιες ιδιότητες με το δισδιάστατο $\nabla$ (ουσιαστικά είναι το $\nabla$ μεταξύ Y και Z) και επιδέχεται παρόμοια ερμηνεία. Η διαφορά είναι ότι το $\nabla$(YXW) επηρεάζεται από το ποιά από τις τρεις μεταβλητές θα θεωρήσουμε σαν εξαρτημένη και ποιές σαν ανεξάρτητες. Γενικά ισχύει ότι $\nabla$(YXW) $\neq$ XYW) $\neq$ $\nabla$(WYX). Ας σημειωθεί ότι ο παρονομαστής του παραπάνω κλάσματος αποτελεί (όπως και στην δισδιάστατη περίπτωση) μέσο για την μέτρηση της ακρίβειας της πρόβλεψης.

΄Εστω τώρα μία πρόβλεψη με εξαρτημένη μεταβλητή την Y και ανεξάρτητη την X. Αν τροποποιήσουμε την πρόβλεψη θεωρώντας μία δεύτερη ανεξάρτητη μεταβλητή W είναι δυνατό με το μέτρο $\nabla$(YXW) να αξιολογήσουμε την επιτυχία της νέας πρόβλεψης. Είναι όμως χρήσιμο να μετρήσουμε την αξία της επιπρόσθετης πληροφορίας (δηλαδή τη συνεισφορά) της νέας μεταβλητής W στην πρόβλεψη της Y. Αυτό επιτυγχάνεται με το εξής μέτρο συνολικής μερικής επιτυχίας της πρόβλεψης $\nabla$(YXW|X):

$$\nabla\,(YXW|X) = 1 - \frac{\sum_i \sum_j \sum_k \omega\,(i, j, k)\; p\,(i, j, k)}{\sum_i \sum_j \sum_k \omega\,(i, j, k)\; [p\,(i\,j.)/\; p(.j.)]\; p(.jk)} \qquad (8)$$

όπου i= 1..R, j= 1..C, k= 1..S

Το $\nabla$(YXW|X) είναι μέτρο PRE με τιμές στο διάστημα -∞, +1 όπου η τιμή 0 αποκτάται όταν στην πρόβλεψη της Y και πέραν της συνεισφοράς της X, η συμμετοχή της μεταβλητής W δέν έχει καμία αξία ενώ $\nabla$(YXW|X) = 1 όταν ο συνδυασμός των X και W προβλέπει τέλεια την Y.

Πέρα από την επιτυχία της πρόβλεψης, η μέτρηση της μεταβολής της ακρίβειας περνώντας από την δισδιάστατη στην τρισδιάστατη πρόβλεψη είναι επιθυμητή και δίνεται από τον παράγοντα U-μεταβολής της ακρίβειας της τρισδιάστατης πρόβλεψης P(YXW) προς την ακρίβεια της δισδιάστατης P(YX).

΄Οπως στην περίπτωση της δισδιάστατης πρόβλεψης P(YX), στατιστικοί έλεγχοι μπορούν να γίνουν για τον έλεγχο των υποθέσεων $\nabla$(YXW) = 0 και

$V(YXW|X) = 0$. Και στις δύο περιπτώσεις ο έλεγχος πραγματοποιείται βάσει του στατιστικού

$$Z = \frac{\text{εκτιμούμενη τιμή}}{\sqrt{\text{εκτ. διακύμανση}}}$$

όπου η εκτιμούμενη τιμή είναι αντίστοιχα $\hat{V}$ (YXW) και $\hat{V}(YXW|X)$ ενώ η εκτιμούμενη διακύμανση δίνεται για μεν την πρώτη περίπτωση από τη σχέση II, για δε τη δεύτερη περίπτωση από τη σχέση III του παραρτήματος όπου όπως πάντα οι εμφανιζόμενες πιθανότητες αντικαθίστανται από τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες που υπολογίζονται βάσει των δειγματικών δεδομένων.

### 4.1. Περιοχές στις οποίες μπορεί να εφαρμοστεί η ΑΠ

Η ανάλυση προβλέψεων μπορεί να εφαρμοστεί επωφελώς στον ευρύτερο χώρο των κοινωνικών επιστημών όπου δεν είναι καθόλου ασυνήθης η ανάγκη δημιουργίας μοντέλων πρόβλεψης με χρήση ποιοτικών μεταβλητών. Σαν παράδειγμα αναφέρουμε τον χώρο της εξελικτικής ψυχολογίας. Ο κλάδος αυτός της Ψυχολογίας αποσκοπεί κατ' αρχήν να προσδιορίσει και να περιγράψει τις μορφές στις οποίες εμφανίζονται οι διάφορες διαστάσεις της ανθρώπινης συμπεριφοράς, των χαρακτηριστικών ή των ικανοτήτων καθώς το άτομο αναπτύσσεται. Απώτερος όμως σκοπός είναι να διακριβωθούν οι σχέσεις και οι αλληλεξαρτήσεις ανάμεσα στις ποικίλες διαστάσεις που εμπίπτουν στο πεδίο των ενδιαφερόντων ενός εξελικτικού ερευνητή. Ένα από τα βασικά ερωτήματα για τα οποία ενδιαφέρεται η εξελικτική ψυχολογία είναι ο τρόπος με τον οποίο σχετίζονται οι μεταβολές κάποιας ικανότητας των ατόμων (όπως η ικανότητα για κατανόηση σχέσεων αναλογίας) με τις μεταβολές σε κάποια άλλη ικανότητα (όπως η ικανότητα για λύση εξισώσεων). Συνεπώς ο καθορισμός των διαφόρων επιπέδων κατά μήκος των οποίων αναπτύσσονται οι ικανότητες των ατόμων αποτελεί ένα στάδιο ουσιαστικής σημασίας στην έρευνα των σχέσεων ανάμεσα στις ικανότητες. Το κύριο πρόβλημα όμως αφορά την εξελικτική αιτιότητα που μπορεί να συγκεκριμενοποιηθεί στο ερώτημα που ακολουθεί: Σε ποιο βαθμό και με ποιο τρόπο η ανάπτυξη μιας ικανότητας X επηρεάζει την ανάπτυξη μίας ικανότητας Y —ή αντιστρόφως.

Η ανάλυση προβλέψεων προτάθηκε από τους Froman και Hubert (1980) ως κατ' εξοχήν κατάλληλη μέθοδος για την ανάλυση εξελικτικών δεδομένων και αυτό διότι αποτελεί μέθοδο για την ανάλυση των αιτιωδών σχέσεων που συνδέουν τις δύο μεταβλητές και όχι για μια απλή ανάλυση της συμμεταβολής.

## 4.2. Εφαρμογές της Ανάλυσης Προβλέψεων

Ακολουθεί η παρουσίαση με συνοπτική μορφή τριών εφαρμογών της ΑΠ που έχουν σαν σκοπό να βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση των βασικών αρχών της μεθόδου. Οι εφαρμογές αυτές αποτελούν τμήματα ερευνητικών εργασιών που πραγματοποιήθηκαν στο Ψυχολογικό Εργαστήριο του Τομέα Ψυχολογίας της Φιλοσοφικής Σχολής του ΑΠΘ.

Οι εργασίες αυτές αποτελούν μέρος ενός πολύχρονου ερευνητικού προγράμματος που έχει ως απώτερο στόχο του να χαρτογραφήσει τις δομές του γνωστικού συστήματος και να ιχνηλατίσει την ανάπτυξη τους από την πρώιμη παιδική ηλικία μέχρι τα γηρατειά, (βλ. Demetriou, 1992; Demetriou, Efklides & Platsidou, in press). Επομένως οι εφαρμογές που θα παρουσιαστούν παρακάτω μπορούν να ειδωθούν σαν παραδείγματα του τρόπου με τον οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ΑΠ για να προβλέψει τις αλληλεξαρτήσεις των γνωστικών ικανοτήτων κατά την ανάπτυξη.

## 4.3. Εφαρμογή 1: Έλεγχος Ανταγωνιστικών θεωριών

Η μελέτη αυτή (Demetriou, Efklides and Platsidou, study 4, in press) αναφέρεται στην σύγχρονη ανάπτυξη δύο ικανοτήτων. Στην πράξη σύγχρονη ανάπτυξη σημαίνει ότι όταν η μία ικανότητα αναβαθμίζεται από το επίπεδο Ε στο επίπεδο Ε+1 στην κλίμακα των επιπέδων κατά μήκος της οποίας αναπτύσσεται, τότε και η άλλη ικανότητα πρέπει να αναβαθμίζεται από το επίπεδο Ε στο Ε+1 της δικής της κλίμακας επιπέδων. Στη μελέτη αυτή ερευνήθηκε η ανάπτυξη δύο διαφορετικών απόψεων της βραχύχρονης μνήμης. Συγκεκριμένα της διαστασιακής και της διανυσματικής μνήμης, κατά την θεωρία του Case (1985). Η πρώτη αναφέρεται στη συγκράτηση ψηφίων και η δεύτερη στη συγκράτηση αναλογικών σχέσεων. Κατά τη θεωρία του Case οι δύο αυτές ικανότητες θα έπρεπε να αναπτυχθούν διαδοχικά. Ωστόσο σύμφωνα με τις έρευνες των Demetriou et al (in press) η ανάπτυξη των δύο ικανοτήτων φαίνεται σύγχρονη μάλλον παρά διαδοχική. Συνεπώς η επιβεβαίωση της πρόβλεψης ότι οι δύο ικανότητες αναπτύσσονται συγχρόνως θα ήταν ασύμφωνη με τη θεωρία του Case ενώ θα εναρμονιζόταν με τις απόψεις των Demetriou et al (in press).

Στο πείραμα συμμετείχαν 46 υποκείμενα από τις εξής ηλικίες: από τη Στ' τάξη του Δημοτικού (10 κορίτσια και 6 αγόρια), από την Β' τάξη του Γυμνασίου (10 κορίτσια και 8 αγόρια) και από την Α' τάξη του Λυκείου (8 κορίτσια και 4 αγόρια). Όλα τα υποκείμενα προέρχονταν από γονείς με υψηλό κοινωνικοοικονομικό επίπεδο. Οι δύο διαστάσεις του πίνακα δεδομένων (Πίνακας 3) εκπροσωπούν τις δύο διαφορετικές απόψεις της βραχύχρονης μνήμης. Η κάθετη διάσταση εκπροσωπεί την διανυσματική μνήμη ενώ η οριζόντια την διαστασιακή.

Οι πίνακες 3α και 3 β παρουσιάζουν τις κυψέλες σφάλματος για τα δύο διαφορετικά μοντέλα πρόβλεψης το πρώτο βάσει της θεωρίας του Case και το δεύτερο βάσει της υπόθεσης της σύγχρονης ανάπτυξης.

Το πρώτο μοντέλο εκφράζει τη θεωρία του Case που ειδικότερα καθορίζει ότι η διαστασιακή μνήμη πρέπει να αναπτύσσεται πριν από την διανυσματική αλλά η διαφορά επιπέδων μεταξύ των δύο ικανοτήτων δεν μπορεί να είναι απεριόριστη. Από ένα σημείο και εξής το άτομο πρέπει να εισέλθει και στην τροχιά ανάπτυξης της διανυσματικής μνήμης, γιατί όταν η διαστασιακή μνήμη φτάσει στο επίπεδο 4, τότε είναι δυνατή η σύνθεση διανυσματικών μονάδων. Το δεύτερο μοντέλο της σύγχρονης ανάπτυξης είναι ένα διαγώνιο μοντέλο. Αναγνωρίζει όμως ότι, αφενός, λόγω της αστάθειας των επιδόσεων κατά την ανάπτυξη και, αφετέρου, λόγω της ανακρίβειας των εξελικτικών μετρήσεων είναι λογική η ύπαρξη κάποιων υποκειμένων στις παραδιαγώνιες κυψέλες. Τούτο μπορεί να εκφραστεί αν θεωρηθούν οι παραδιαγώνιες κυψέλες ως κυψέλες σφάλματος με μικρότερο βάρος σφάλματος από τις απομακρυσμένες από τη διαγώνιο κυψέλες. Δηλαδή αποδίδεται στις παραδιαγώνιες κυψέλες η τιμή 0.5 ενώ σε όλες τις άλλες κυψέλες σφάλματος η συνήθης τιμή 1. Για το πρώτο μοντέλο βρέθηκε ότι *V*- .04 (ρ>.05) και U= .770. Για το δεύτερο μοντέλο *V*= .406 (ρ<.001) και U'= .512. Η ακρίβεια των προβλέψεων υπολογίστηκε με βάση τον τύπο (2). Οι τιμές των μέτρων για την επιτυχία της πρόβλεψης υπολογίστηκαν βάσει του τύπου (3) ενώ η στατιστική τους σημαντικότητα ελέγχθηκε με τη βοήθεια του τύπου (4).

Φαίνεται ότι παρ' όλο που στο δεύτερο μοντέλο είχαμε μία μείωση της ακρίβειας, η τιμή του μέτρου επιτυχίας της πρόβλεψης είναι σαφώς καλύτερη. Πράγματι με το μοντέλο αυτό επιτυγχάνεται μία μείωση των σφαλμάτων («ατόμων» στις κυψέλες σφάλματος) κατά 41% ενώ με το πρώτο μοντέλο μόνο κατά 4%. Ας σημειωθεί ακόμα ότι στο μοντέλο του Case το μέτρο για την επιτυχία της πρόβλεψης δεν διαφέρει στατιστικά από την τιμή 0. Συνεπώς το δεύτερο μοντέλο υπερέχει σαφέστατα και είναι αυτό που θεωρήθηκε ότι εκφράζει καλύτερα την ανάπτυξη των παραπάνω ικανοτήτων.

Η εφαρμογή της μεθόδου στο πλαίσιο της έρευνας αυτής παρέχει ένα καθαρό κριτήριο για την επιλογή μίας από δύο ανταγωνιστικές προβλέψεις από τις οποίες η κάθε μια προκύπτει από διαφορετική θεωρία. Έτσι η μέθοδος επιτρέπει στον ερευνητή να ελέγξει την εγκυρότητα ανταγωνιστικών θεωριών που περιγράφουν με διαφορετικό τρόπο την ανάπτυξη των ίδιων ικανοτήτων.

### 4.4. Εφαρμογή 2: Οικοδόμηση θεωρίας

Η δεύτερη εφαρμογή (Demetriou et al., 1991) αναφέρεται στο μοντέλο της εξελικτικής προτεραιότητας μίας δεδομένης μαθηματικής ικανότητας έναντι μίας άλλης μαθηματικής ικανότητας. Στο πείραμα έλαβαν μέρος συνολικά 372 υποκείμενα ηλικίας 9 ως 16 χρόνων (για μία λεπτομερή περιγραφή της σύνθεσης του δείγματος βλ. πίνακα 4).

Ο πίνακας 5 παρουσιάζει την κατανομή των επιπέδων στα οποία βρέθηκαν να λειτουργούν τα υποκείμενα αυτά. Η κάθετη διάσταση του πίνακα δεδομένων αντιστοιχεί με τα επίπεδα δια των οποίων εξελίσσεται η ικανότητα να επιτελεί κανείς τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής τη μία σε συνδυασμό με την άλλη. Η οριζόντια διάσταση αντιστοιχεί με τα επίπεδα δια των οποίων εξελίσσεται η αλγεβρική ικανότητα. Η μία πρόβλεψη που ελέγχεται είναι ότι η ικανότητα για αριθμητικές πράξεις εξελίσσεται πριν από ή συγχρόνως με την ικανότητα για χειρισμό αλγεβρικών σχέσεων. Το μοντέλο αυτό εκφράζεται από τον πίνακα 5α που παρουσιάζει τις κυψέλες σφάλματος. Ας θεωρήσουμε ακόμη ένα δεύτερο μοντέλο που εκφράζεται με τις κυψέλες σφάλματος στον πίνακα 5β σύμφωνα με το οποίο, μέχρι το τέταρτο επίπεδο, η ικανότητα για αριθμητικές πράξεις εξελίσσεται πριν την αλγεβρική ικανότητα ενώ στο τελευταίο επίπεδο η εξέλιξη είναι σύγχρονη.

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι δεν υπάρχει καμιά θεωρία για το τι ακριβώς συμβαίνει ως προς την ανάπτυξη των δύο ικανοτήτων. Επομένως οι προβλέψεις βασίζονται σε εναλλακτικές ερμηνείες που ο ερευνητής μπορεί να διατυπώσει για την ανάπτυξη των δύο ικανοτήτων. Σε ένα τέτοιο πλαίσιο, η ανάλυση προβλέψεων λειτουργεί ως μέσο οικοδόμησης της θεωρίας. Όπως είναι φανερό η ισχυρότερη πρόβλεψη είναι εκείνη που θα διατηρηθεί για να λειτουργήσει ως αφετηρία εξηγήσεων για τους λόγους που βρίσκονται πίσω από τις συγκεκριμένες εξελικτικές διαστρωματώσεις.

Η Ανάλυση Προβλέψεων έδωσε για το πρώτο μοντέλο $V= .597$ ($p<.00$) και $U= .227$ ενώ για το δεύτερο $V'= .246$ ($p<.0001$) και $U'= .317$. Η διαφορά των δύο μέτρων επιτυχίας της πρόβλεψης είναι στατιστικά σημαντική ($p<.00$) υπέρ του πρώτου μοντέλου όπως βρέθηκε με εφαρμογή του τύπου (5). Η τιμή της ακρίβειας όμως είναι μεγαλύτερη στο δεύτερο μοντέλο το οποίο περιέχει μεγαλύτερο πλήθος κυψελών σφάλματος. Η τεχνική της αποσύνθεσης δείχνει (βάσει του τύπου 6) ότι $V(+) = -.638$. Επειδή η ποσότητα αυτή είναι αρνητική οι επιπλέον κυψέλες σφάλματος του δεύτερου μοντέλου (πέρα από το ότι αυξάνουν την ακρίβεια) δεν έχουν καμιά απολύτως αξία στην πρόβλεψη. Προφανώς το πρώτο μοντέλο είναι το προτιμότερο και είναι αυτό που τελικά υιοθετήθηκε. Επομένως η όποια θεωρία για τις εξελικτικές σχέσεις ανάμεσα στην ικανότητα εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων και την αλγεβρική ικανότητα πρέπει να στηριχθεί στο γεγονός της απόλυτης προτεραιότητας της πρώτης έναντι της δεύτερης (πρώτο μοντέλο), παρά στην υπόθεση ότι και η δεύτερη ικανότητα μπορεί σε κάποια φάση της ανάπτυξης να προχωρεί παράλληλα με την πρώτη ικανότητα (δεύτερο μοντέλο).

### 4.5. Εφαρμογή 3: Εφαρμογή της ΑΠ σε εργαστηριακό πλαίσιο

Το παράδειγμα που ακολουθεί σκοπεύει να δείξει την εφαρμογή της μεθόδου σε ένα τρισδιάστατο πίνακα όπου επιχειρείται ο έλεγχος προβλέψεων για τις κατηγορίες μιας εξαρτημένης μεταβλητής με αναφορά στις κατηγορίες δύο ανεξάρτητων μεταβλητών. Έχει ήδη αναφερθεί ότι το πλεονέκτημα της εφαρμογής της μεθόδου σε τρισδιάστατους πίνακες είναι ότι επιτρέπει την επιτυχέστερη πρόβλεψη της εξαρτημένης μεταβλητής, γιατί μπορεί να συνδεθεί με την επίδραση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή η επιτυχία της τρισδιάστατης πρόβλεψης πρέπει να κρίνεται σε σχέση με τη δισδιάστατη, να δίνεται δηλαδή δυνατότητα στον ερευνητή να αποφανθεί αν η εισαγωγή της δεύτερης ανεξάρτητης μεταβλητής βελτιώνει την ικανότητα πρόβλεψης της εξαρτημένης μεταβλητής πέρα από την ερμηνεία που θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε με αναφορά στην πρώτη ανεξάρτητη.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η έρευνα είχε σαν σκοπό να εξετάσει αν είναι δυνατή η επιτάχυνση της γνωστικής ανάπτυξης υπό εργαστηριακές συνθήκες (Demetriou, Efklides and Platsidou, study 2, in press). Ειδικότερα, εξετάστηκε αν είναι δυνατό να οδηγήσουμε ένα άτομο από ένα δεδομένο εξελικτικό επίπεδο της ποσοτικής-συσχετικής του ικανότητας (που αποτελεί τη βάση της μαθηματικής σκέψης) σε ένα ανώτερο επίπεδο με μία σύντομη χρονικά άσκηση. Με άλλα λόγια το ερώτημα ήταν αν με ειδικούς τρόπους μπορούμε μέσα σε δύο περίπου ώρες να προκαλέσουμε αλλαγές στο γνωστικό σύστημα που υπό ομαλές συνθήκες χρειάζονται μήνες και μερικές φορές χρόνια για να συμβούν. Στο πείραμα έλαβαν μέρος συνολικά 338 άτομα ηλικίας 10, 12, 14 και 16 χρόνων ισοκατανεμημένα ως προς το φύλο.

Η βασική ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το γνωστικό επίπεδο στο οποίο βρέθηκαν τα άτομα πριν από την άσκηση. Η εξαρτημένη μεταβλητή είναι το επίπεδο στο οποίο βρέθηκαν τα άτομα μετά την άσκηση. Οι δύο μεταβλητές βρίσκονται στην κάθετη και στην οριζόντια διάσταση του πίνακα 6α αντίστοιχα και περιλαμβάνουν τρεις κατηγορίες που αντιστοιχούν στα γνωστικά επίπεδα. Η πρόβλεψη που ελέγχεται εδώ είναι ότι οι επιδόσεις των ατόμων μετά την άσκηση θα βρίσκονται στο ίδιο ή σε ανώτερο στάδιο από τις επιδόσεις τους πριν από την άσκηση. Τούτο είναι φανερό στον πίνακα 6β που δείχνει τις κυψέλες σφάλματος. Φαίνεται στο πίνακα αυτό ότι κατά ένα γενικό τρόπο δεν επιτρέπεται να βρεθεί κάποιος κατά τη δεύτερη εξέταση σε επίπεδο χαμηλότερο από την πρώτη. Προφανώς η επιβεβαίωση του μοντέλου αυτού είναι η ελάχιστη προϋπόθεση για να δεχτεί κανείς ότι είναι δυνατή η επιτάχυνση της γνωστικής ανάπτυξης. Η ΑΠ έδωσε για το μοντέλο αυτό $\nabla$= .417 ($p<.00$) και U= .230. Αυτό σημαίνει ότι στην προσπάθεια πρόβλεψης των γνωστικών επιπέδων στα οποία πρέπει να βρίσκονται τα άτομα μετά την άσκηση, η γνώση της κατανομής των ατόμων στα γνωστικά επίπεδα πριν την άσκηση επιφέρει μια μείωση των σφαλμάτων κάτω από το συγκεκριμένο μοντέλο πρόβλεψης κατά 42%.

Με βάση τη γενική εξελικτική θεωρία θα μπορούσε να υποθέσει κάποιος ότι η βελτίωση του γνωστικού επιπέδου των ατόμων είναι συνάρτηση δύο παραγόντων. Του εξελικτικού επιπέδου στο οποίο βρίσκεται το άτομο πριν από την άσκηση και του τρόπου με τον οποίο δέχτηκε την άσκηση. Είναι λογικό λοιπόν σε μια προσπάθεια βελτίωσης της επιτυχίας της πρόβλεψης να ληφθεί υπ' όψη η επιτυχία ή η αποτυχία των ατόμων στην δοκιμασία της άσκησης. Αυτή είναι η δεύτερη ανεξάρτητη μεταβλητή η συμμετοχή της οποίας επιτρέπει την πληρέστερη επαναδιατύπωση του μοντέλου πρόβλεψης. Στην οριζόντια διάσταση του πίνακα δεδομένων 7α φαίνεται ο συνδυασμός των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών και στην κάθετη η εξαρτημένη μεταβλητή. Ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές φαίνονται όλοι οι συνδυασμοί των τριών γνωστικών επιπέδων πριν από την άσκηση με τις δύο καταστάσεις ως προς την άσκηση που είναι η επιτυχία (1) ή η αποτυχία (2).

Σύμφωνα με το μοντέλο της τρισδιάστατης πρόβλεψης (του οποίου το σύνολο κυψελών σφάλματος εμφανίζεται στον πίνακα 7β) η επιτυχία στην άσκηση θα έχει σαν αποτέλεσμα την μετακίνηση σε ανώτερο γνωστικό στάδιο ή την παραμονή στο ίδιο που ήταν πριν την άσκηση. Αντίθετα η αποτυχία αποκλείει την μετακίνηση σε ανώτερο στάδιο όχι όμως και την παραμονή στο ίδιο. Μόνο στην περίπτωση των ατόμων του επιπέδου 1 η αποτυχία στην άσκηση δεν αποκλείει την ύπαρξη μετά την άσκηση κάποιων ατόμων στο στάδιο 0. Αυτή η περίπτωση δεν αφορά άτομα του επιπέδου 2 που έχουν αποτύχει στην άσκηση λόγω ακριβώς του υψηλού γνωστικού επιπέδου στο οποίο βρίσκονται.

Η εφαρμογή της ΑΠ έδωσε τα εξής αποτελέσματα: το μέτρο για την επιτυχία της πρόβλεψης είχε τιμή $\nabla(YXW) = .560$, ($p<.00$) η ακρίβεια U= .400, το μέτρο συνολικής μερικής επιτυχίας $\nabla(YXW|X) = .317$ ($p<.00$) και ο παράγοντας U-μεταβολής ήταν ίσος με 1.74. Η τιμή του V(YXW) υπολογίστηκε με εφαρμογή του τύπου (7), η τιμή της ακρίβειας U βάσει του παρανομαστή του κλάσματος στον ίδιο τύπο, το μέτρο V(YXW|X) με εφαρμογή του τύπου (8) και τέλος η στατιστική σημαντικότητα των μέτρων ελέγχθηκε μέσω του τύπου (9).

Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν καθαρά ότι με το τρισδιάστατο μοντέλο η επιτυχία της πρόβλεψης εμφανίζεται οπωσδήποτε βελτιωμένη συγκρινόμενη με αυτή του δισδιάστατου (V(YXW) = .560 έναντι V = .417). Ιδιαίτερη σημασία έχει το γεγονός ότι η συνεισφορά της δεύτερης ανεξάρτητης μεταβλητής, που είναι το αποτέλεσμα της δοκιμασίας στην άσκηση, είναι ουσιαστική γιατί προκαλεί κατά 32% επιπλέον μείωση των σφαλμάτων κατά την πρόβλεψη από αυτή που προκαλεί μόνη της η βασική ανεξάρτητη μεταβλητή δηλαδή το γνωστικό στάδιο των ατόμων πριν την άσκηση (V(YXW|X) = .317). Όσον αφορά την ακρίβεια των μοντέλων, αυτή είναι μεγαλύτερη κατά 74% στο τρισδιάστατο μοντέλο σε σχέση με αυτή του δισδιάστατου όπως έδειξε ο παράγοντας U-μεταβολής: .40/.23 = 1.74.

Με το παράδειγμα αυτό έγινε φανερό ότι η ΑΠ μπορεί να χρησιμοποιηθεί πολύ αποδοτικά για την ανάλυση εργαστηριακού τύπου εξελικτικών ερευνών. Από όσο γνωρίζουμε, καμιά άλλη μέθοδος δεν επιτρέπει την ανάλυση εργαστηριακών πειραμάτων στην εξελικτική ψυχολογία με την ακρίβεια που επιτρέπει η μέθοδος αυτή. Επιπλέον η μέθοδος αυτή για πρώτη φορά χρησιμοποιήθηκε με τον τρόπο αυτό στο παρόν άρθρο.

### 4.6. Το πρόγραμμα PAQV

Στο εργαστήριο Ψυχολογίας του Τμήματος Φιλοσοφίας Παιδαγωγικής και Ψυχολογίας του Α.Π.Θ. αναπτύχθηκε το πρόγραμμα PAQV (Prediction Analysis of Qualitative Variables) που αποτελεί λογισμικό προορισμένο για Η/Υ τύπου IBM ή συμβατούς και αποτελεί προσπάθεια για την υλοποίηση των δυνατοτήτων της ΑΠ που περιγράφονται σε αυτήν την εργασία. Το PAQV είναι γραμμένο στη γλώσσα Turbo Basic. Το εκτελέσιμο αρχείο PAQV.EXE καταλαμβάνει χώρο 74640 Bytes και η εκτέλεση του πραγματοποιείται από το DOS. Το PAQV διατίθεται ελεύθερα και συνοδεύεται από σύντομες επεξηγήσεις.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## I)

$$\mathrm{Var}(\hat{\nabla}) = (n-1)^{-1} \left[ \sum_i \sum_j \alpha^2 (i, j)\, p\,(i, j) - \left[ \sum_i \sum_j \alpha\,(i, j)\, p\,(i, j) \right]^2 \right]$$

όπου $\alpha\,(i, j) = U.^{-1} \left[\omega(i, j) - (1 - \nabla)\,(\Pi\,(i.) + \Pi\,(.j)\,)\right]$

με $\Pi\,(i.) = \sum_j \omega\,(i, j)\, p\,(.j)$ και $\Pi\,(.j) = \sum_i \omega\,(i, j)\, p\,(i.)$

και το U δίνεται από τον τύπο (2).

## II)

$\mathrm{Var}\,\{\hat{\nabla}\,(YXW)\} =$

$$(n - 1)^{-1} \cdot \left[ \sum_i \sum_j \sum_k \alpha^2\,(i, j, k)\, p\,(i, j, k) - \left[ \sum_i \sum_j \sum_k \alpha\,(i, j, k)\, p\,(i, j, k)\right]^2 \right]$$

όπου $\alpha(i, j, k) = U.^{-1} \left[\, \omega(i, j, k) - B\,(\Pi\,(i\,..) + \Pi\,(.jk)\,)\,\right]$

και

$\Pi\,(i\,..\,) = \sum_j \sum_k \omega\,(i, j, k)\, p\,(.jk)$ $\qquad \Pi\,(.jk) = \sum_i \omega\,(i, j, k)\, p\,(i\,..)$

U είναι ο παρονομαστής του κλάσματος στον τύπο (7)
ενώ $B = 1 - \nabla\,(YXW)$

## III)

$\mathrm{Var}\,\{\,\hat{\nabla}\,(YXW \mid X)\,\}$ δίνεται από τον τύπο II) όπου όμως αυτή την φορά θα είναι
$\alpha\,(i, j, k) =$

$$U^{-1}{}_x \,.\, [\omega\,(i, j, k) - K\,[\,\Pi\,[\,y(i) \mid x(j)\,] + \Pi\,[w(k) \mid x(j)\,] - \Pi\,[.\ \mid \chi(j)\ ]\,]\,]$$

όπου $U_x$ είναι ο παρονομαστής του κλάσματος στον τύπο (8) και K είναι ο αριθμητής του κλάσματος στον τύπο (7) (ή στον (8)).

Είναι επίσης:

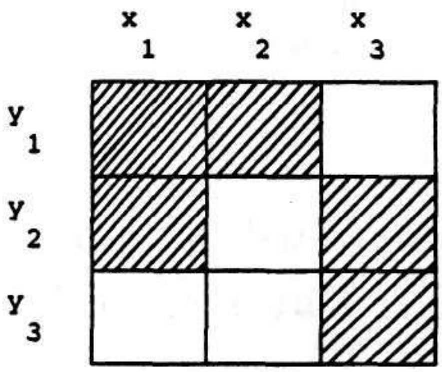
$$\Pi\,[\, y(i) \mid x(j) \,] = \sum_{k} \omega\,(i, j, k)\,[\, p\,(.jk)\; /\; p\,(.j.) \,]$$

$$\Pi\,[\, w(k) \mid x(j) \,] = \sum_{i} \omega(i, j, k)\,[\, p(ij.)\; /\; p(.j.) \,]$$

$$\Pi\,[\, . \mid x(j) \,] = \sum_{i}\sum_{k} \omega\,(i, j, k)\,[\, p\,(ij.)\; /\; p\,(.j.) \,]\,[\, p\,(.jk)\; /\; p\,(.j.) \,]$$

**Πίνακας 1**

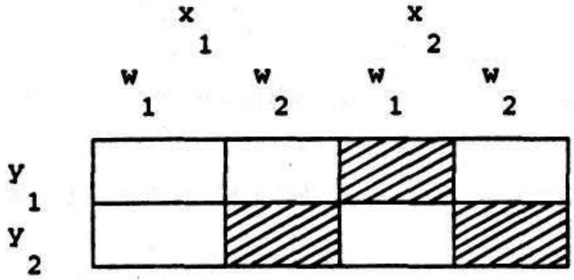
**Κυψέλες σφάλματος στην δισδιάστατη πρόβλεψη**




Οι γραμμοσκιασμένες κυψέλες παριστούν τις κυψέλες σφάλματος.

**Πίνακας 2**

**Κυψέλες σφάλματος στην τρισδιάστατη πρόβλεψη**




Οι γραμμοσκιασμένες κυψέλες παριστούν τις κυψέλες σφάλματος.

## Πίνακας 3

### Πίνακας δεδομένων και κυψέλες σφάλματος για τα δύο μοντέλα πρόβλεψης

**Πίνακας δεδομένων**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 2 | 7 | 10 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 2 | 8 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

**Πίνακας 3α**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Πίνακας 3β**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | .5 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | .5 | 0 | .5 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | .5 | 0 | .5 | 1 |
| 4 | 1 | 1 | .5 | 0 | .5 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | .5 | 0 |

Η οριζόντια διάσταση αντιστοιχεί στην διαστασιακή μνήμη και η κάθετη στη διανυσματική. Οι κυψέλες σφάλματος σημειώνονται με 1 ή 0.5.

## Πίνακας 4

### Κατανομή του δείγματος κατά ηλικία, κοινωνικοοικονομικό επίπεδο και φύλο

| | Κοινωνικοοικονομικό επίπεδο | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Ανώτερο Αστικό | | Κατώτερο Αστικό | | Αγροτικό | | |
| Ηλικία* | Γυν. | Ανδρ. | Γυν. | Ανδρ. | Γυν. | Ανδρ. | Σύνολο |
| 9-6 | 15 | 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 31 |
| 10-6 | 13 | 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 29 |
| 11-5 | 15 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 30 |
| 12-6 | 11 | 18 | 8 | 16 | 8 | 8 | 69 |
| 13-8 | 17 | 17 | 16 | 14 | 6 | 0 | 70 |
| 14-7 | 17 | 19 | 13 | 15 | 5 | 3 | 72 |
| 15-6 | 7 | 9 | 6 | 7 | 0 | 0 | 29 |
| 16-7 | 17 | 13 | 6 | 6 | 0 | 0 | 42 |
| Σύνολο | 112 | 123 | 49 | 58 | 19 | 11 | 372 |

* Ο πρώτος αριθμός δηλώνει χρόνια και ο δεύτερος μήνες.

## Πίνακας 5

**Πίνακας δεδομένων και κυψέλες σφάλματος για τα δύο μοντέλα πρόβλεψης**

**Πίνακας δεδομένων**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 11 | 4 | 3 | 5 |
| 2 | 6 | 18 | 12 | 30 | 14 |
| 3 | 3 | 11 | 19 | 21 | 30 |
| 4 | 1 | 1 | 5 | 13 | 53 |
| 5 | 0 | 1 | 2 | 4 | 100 |

**Πίνακας 5α**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

**Πίνακας 5β**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Η οριζόντια διάσταση αντιστοιχεί στην αλγεβρική ικανότητα και η κάθετη στην ικανότητα για αριθμητικές πράξεις. Οι κυψέλες σφάλματος σημειώνονται με 1.

## Πίνακας 6

**Πίνακας δεδομένων και κυψέλες σφάλματος για το μοντέλο διοδιάστατης πρόβλεψης**

**Πίνακας δεδομένων 6α**

| | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 95 | 30 | 10 |
| 1 | 22 | 19 | 5 |
| 2 | 56 | 33 | 68 |

**Πίνακας κυψελών σφάλματος 6β**

| | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 |

Η οριζόντια διάσταση αφορά τα γνωστικά στάδια μετά την άσκηση και η κάθετη τα γνωστικά στάδια πριν την άσκηση. Οι κυψέλες σφάλματος σημειώνονται με 1.

**Πίνακας 7**

**Πίνακας δεδομένων και κυψέλες σφάλματος για το μοντέλο τρισδιάστατης πρόβλεψης**

| | Πίνακας δεδομένων 7α | | | | | | | Πίνακας κυψελών σφάλματος 7β | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (0,1) | (0,2) | (1,1) | (1,2) | (2,1) | (2,2) | | (0,1) | (0,2) | (1,1) | (1,2) | (2,1) | (2,2) |
| 0 | 37 | 58 | 3 | 27 | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 4 | 18 | 6 | 13 | 2 | 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 41 | 15 | 24 | 9 | 24 | 44 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Η οριζόντια διάσταση παριστά τα γνωστικά στάδια μετά την άσκηση και η κάθετη τους συνδυασμούς των γνωστικών σταδίων πριν την άσκηση με τις δυνατές εκβάσεις (επιτυχία: 1, αποτυχία: 2) στην δοκιμασία της άσκησης. Οι κυψέλες σφάλματος σημειώνονται με 1.

## Βιβλιογραφία


*Bishop, Y.M.M., Fienberg, S.E., and Holland, P. W.* (1975). "Discrete Multivariate Analysis: Theory and Practice". Cambridge, Mass: MIT Press.

*Case, R.* (1985). "Intellectual development: From birth to adulthood". New York: Academic Press.

*Cramer, H.* (1946). "Mathematical Methods of Statistics". Princeton, N.J., Princeton Univ. Press.

*Demetriou,* A (1992). In quest of the functional architecture of developing mind. Educational Psychology Review (in press).

*Demetriou, A., Efklides, A and Platsidou M.,* in press. Experiential structuralism: A frame for unifying cognitive developmental theories. Monographs of the society for Research in Child Development.

*Demetriou, A., Platsidou, M., Efklides A., Metallidou Y., and Shayer M.* (1991). The development of quantitative-relational abilities from childhood to adolescence: Structure, scaling and individual differences. Learning and Instruction, 1, 19-43.

*Froman, T., and Hubert L.J.* (1980). Application of Prediction Analysis to Developmental Priority. Psychological Bulletin, 87, 136-146.

*Goodman, L.A., and Kruskal W.H.* (1954). Measures of association for cross classifications. Journal of the American Statistical Association, 49, 732-764.

*Goodman, L.A., and Kruskal W.H,* (1959). Mesures of association for cross classifications. II: Further discussion and reference. Journal ofthe American Statistical Association, 54, 123-163.

*Goodman, L.A., and Kruskal W.H.* (1963). Measures of association for cross classifications. III: Approximate sampling theory. Journal of the American Statistical Association, 58, 310-364.

*Hildebrand, D.K., Laing J.D. and Rosenthal H.* (1977). "Prediction Analysis of Cross Gasifications". John Wiley and Sons, Inc.

*Ives, K.H., and Gibbons J.D.* (1967). A correlation measure for nominal data. American Statistician, 21(5):16-17.

*Pearson, K.* (1904). On the Theory of Contingency and Its Relation to Association and Normal Correlation. Draper's Co. Memoirs, Biometric Series No 1, London.

*Somers, R.H.* (1962). A new asymmetric measure of association for ordinal variables. American Sociological Review, 27, 799-811.

*Yule, G.U.* (1912). On the methods of measuring association between two attributes. Journal of the Royal Statistical Society, 75, 579-642.