

-

-

Η ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΕΡΔΟΥΣ ΚΑΙ ΚΟΣΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ: ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΠΡΟΣΦΑΤΗΣ ΕΜΠΕΙΡΙΑΣ (A Review)

Υπο
Γεωργίου Ι. Μέργου
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Abstract

This is a review essay on the dual approach to applied production analysis. This essay is by necessity eclectic and considers estimation and reliability of technology parameters using profit and cost functions. Its objective is to present a general overview where theory, empirical application and policy relevance are considered equally. The essay starts with a presentation of the method and continues with a review of recent experience in applying duality theory to production policy questions. (JEL D20, Q11).

Περίληψη

Το άρθρο αυτό επιχειρεί μια σύντομη επισκόπηση της εφαρμογής των συναρτήσεων κέρδους και κόστους στην ανάλυση της τεχνολογίας παραγωγής. Λόγω της ευρύτητας του θέματος η επισκόπηση αυτή είναι κατ' ανάγκη εκλεκτική, εξετάζει την εκτίμηση, αξιοπιστία και χρήση των παραμέτρων τεχνολογίας και επιδιώκει μια συνθετική παρουσίαση όπου εξετάζονται ισότιμα η θεωρία, η εμπειρική εφαρμογή και η χρησιμότητα στην οικονομική πολιτική. Αρχικά γίνεται μια σύντομη παρουσίαση της μεθόδου και στην συνέχεια εξετάζεται η εμπειρία από τις πρόσφατες εμπειρικές εκτιμήσεις σε διάφορους τομείς της οικονομίας.

1. Εισαγωγή

Στο άρθρο αυτό επιχειρείται μια επισκόπηση των προσφάτων εμπειρικών εξελίξεων στην εφαρμοσμένη οικονομική της παραγωγής, με έμφαση στη δυική προσέγγιση. Το ευρύ πεδίο της εφαρμοσμένης οικονομικής της παραγωγής κάνει αδύνατη μια γενική και λεπτομερή επισκόπηση. Όμως, η πρόσφατη

ανάπτυξη της δυϊκής προσέγγισης και η επέκταση της χρήσης της στην εμπειρική ανάλυση δικαιολογεί μια σύντομη επισκόπηση για την παρουσίαση τόσο των πλεονεκτημάτων της προσέγγισης στην εμπειρική ανάλυση, όπως προκύπτουν από τη θεωρία, όσο και των αποτελεσμάτων από τη μέχρι τώρα εμπειρία εφαρμογής της σε διάφορους τομείς της οικονομικής δραστηριότητας.

Τα υποδείγματα που αναλύουν την τεχνολογία παραγωγής μπορούν να καταταγούν σε δύο ομάδες: (α) μελέτες με αναλυτικούς σκοπούς, και (β) μελέτες με σκοπό την διενέργεια προβλέψεων. Η πρώτη ομάδα εξετάζει κυρίως την τεχνολογική διάρθρωση και αποσκοπεί στην εκτίμηση των τεχνολογικών παραμέτρων, ενώ η δεύτερη ομάδα ασχολείται κυρίως με την χρήση εκτιμηθέντων υποδειγμάτων στην διενέργεια προβλέψεων². Στην εργασία αυτή εξετάζονται κυρίως υποδείγματα που ανήκουν στην πρώτη ομάδα. Συγκεκριμένα, γίνεται μια επισκόπηση των πρόσφατων εφαρμογών της δυϊκής προσέγγισης στην ανάλυση της τεχνολογίας της παραγωγής και ειδικότερα επιδεικνύεται:

- (α) μια γενική, και ιδιαίτερα μη-μαθηματική, παρουσίαση της δυϊκής προσέγγισης και
- (β) μια εξέταση της μέχρι τώρα εμπειρίας από τη χρήση της δυϊκής προσέγγισης σε εφαρμοσμένα ερωτήματα (που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην επιλογή αποφάσεων πολιτικής) σε ορισμένους τομείς της οικονομίας.

Λόγω της ευρύτητας του θέματος η επισκόπηση είναι αναγκαστικά εκλεκτική και αφορά κυρίως την εκτίμηση, την αξιοπιστία και την χρήση παραμέτρων τεχνολογίας, όπως οι ελαστικότητες ζήτησης και προσφοράς, οι παράμετροι μεροληψίας της τεχνικής μεταβολής, οι ελαστικότητες υποκατάστασης συντελεστών παραγωγής, κλπ. που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην επιλογή αποφάσεων πολιτικής. Μετά από μια σύντομη παρουσίαση του τρόπου με τον οποίο εκτιμούνται οι παράμετροι αυτοί με τη δυϊκή προσέγγιση, εξετάζεται η εμπειρία από τις πρόσφατες εμπειρικές εκτιμήσεις σε εφαρμοσμένες έρευνες τομέων της οικονομίας.

Η δυϊκή προσέγγιση υπήρξε πάντα δύσκολη για τον ερευνητή λόγω της διατύπωσης πολλών θεωρητικών αποτελεσμάτων σε αυστηρά μαθηματική γλώσσα. Στην επισκόπηση που ακολουθεί, η μαθηματική διατύπωση έχει κατά το δυνατόν αποφευχθεί. Αντίθετα, επιδιώκεται μια συνθετική παρουσίαση όπου εξετάζονται ισότιμα η θεωρία, η εμπειρική εφαρμογή και η χρησιμότητα στην οικονομική πολιτική.

2. Η Δυϊκή Προσέγγιση στην Ανάλυση της Τεχνολογίας Παραγωγής

Η περιγραφή της τεχνολογίας παραγωγής μπορεί να γίνει με τους εξής εναλλακτικούς τρόπους₃:

- α. Τον κλασσικό τρόπο της συνάρτησης παραγωγής.
- β. Μια συνάρτηση κόστους,
- γ. Μια συνάρτηση κέρδους.
- δ. Ένα πλήρες σύστημα συναρτήσεων ζήτησης συντελεστών παραγωγής.

Οποιοσδήποτε από τους ανωτέρω τρόπους μπορεί να περιγράψει πλήρως την τεχνολογία παραγωγής μιας επιχείρησης ή ενός τομέα της οικονομικής δραστηριότητας. Η πλήρης αντιστοιχία μεταξύ όλων των ανωτέρω τρόπων ανάλυσης της τεχνολογίας της παραγωγής έχει αποδειχθεί θεωρητικά. Ο πρώτος τρόπος, δηλαδή η συνάρτηση παραγωγής, είναι γενικά γνωστός. Πρόσφατα γίνεται συνεχώς και μεγαλύτερη χρήση της μεθόδου ανάλυσης της τεχνολογίας παραγωγής με χρήση συναρτήσεων κόστους και κέρδους. Η ανάλυση με βάση ένα σύστημα ζήτησης συντελεστών, θεωρητικά και εμπειρικά δυνατή, έχει ελάχιστα χρησιμοποιηθεί.

Αντικείμενο της εμπειρικής ανάλυσης αποτελούν η εκτίμηση των παραμέτρων που προσδιορίζουν την ζήτηση συντελεστών παραγωγής, την προσφορά προϊόντων (ελαστικότητες), την ύπαρξη οικονομιών κλίμακας, τη δυνατότητα υποκατάστασης μεταξύ των συντελεστών παραγωγής, το μέγεθος και τις επιπτώσεις της τεχνικής αλλαγής και επίσης, την αποτελεσματική κατανομή των πόρων (efficiency).

2.1. Κριτική της Παραδοσιακής Προσέγγισης

Η παραδοσιακή προσέγγιση αρχίζει με μια συνάρτηση παραγωγής

$$AQ = f(x)$$

όπου Q: προϊόν

x: διάνυσμα από n μη-αρνητικές ποσότητες εισροών που χρησιμοποιούνται στην παραγωγική διαδικασία.

Η συνάρτηση f που συσχετίζει το παραγόμενο προϊόν με τις εισροές, περιγράφει πλήρως και μοναδικά την τεχνολογία της παραγωγής. Αυτό το θεωρητικό σημείο υπήρξε το σημείο έναρξης της εμπειρικής ανάλυσης σε

όλους τους οικονομικούς τομείς χρησιμοποιώντας συναρτήσεις όπως η Cobb-Douglas, η Constant Elasticity of Substitution (CES), και πιο πρόσφατα η Translog₄.

Η χρήση μιας συγκεκριμένης συνάρτησης παραγωγής εισάγει στις περισσότερες περιπτώσεις συγκεκριμένες υποθέσεις ως προς τα χαρακτηριστικά της τεχνολογίας παραγωγής. Για παράδειγμα, η επιλογή της συνάρτησης Cobb-Douglas συνεπάγεται την ύπαρξη ελαστικότητας υποκατάστασης ίσης με τη μονάδα για κάθε ζεύγος εισροών που χρησιμοποιούνται στην εμπειρική ανάλυση. Μια τέτοια υπόθεση μπορεί να είναι σωστή όταν χρησιμοποιούνται δύο συντελεστές (κεφάλαιο και εργασία), αλλά δημιουργεί πολλά ερωτηματικά όταν ο αριθμός των συντελεστών παραγωγής αυξάνει. Η δημιουργία της CES προσπαθεί να απαλείψει αυτή την αδυναμία της Cobb-Douglas επιβάλλοντας μια σταθερή (όχι όμως μοναδιαία) ελαστικότητα υποκατάστασης. Ένα άλλο γνωστό ζήτημα είναι η ύπαρξη σταθερών συντελεστών στην παραγωγική διαδικασία όπως το κεφάλαιο (γνωστό στη βιβλιογραφία σαν διαφορά στην υποκατάσταση εισροών ex-ante και ex-post).

Ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζεται εύκολα είναι η υπόθεση (απαραίτητη στην εμπειρική εκτίμηση με διαστρωματικά στοιχεία παραγωγικών μονάδων) της ταυτόσημης συνάρτησης παραγωγής μεταξύ των παραγωγικών μονάδων του δείγματος. Τυχόν υποθέσεις για διαφορές στην τεχνολογία μεταξύ των παραγωγικών μονάδων μπορούν εύκολα να εισαχθούν στην εμπειρική ανάλυση και να εκτιμηθούν.

Η ανάλυση της τεχνολογίας της παραγωγής με βάση τη συνάρτηση παραγωγής υπήρξε το αντικείμενο κριτικής για πολλούς λόγους. Ένας λόγος κριτικής υπήρξε η άποψη ότι οι ποσότητες των συντελεστών παραγωγής δεν προσδιορίζονται εξωγενώς, αλλά ταυτόχρονα με τον προσδιορισμό του παραγομένου προϊόντος. Από την άποψη αυτή υπάρχει πρόβλημα ταυτοποίησης στην εμπειρική εκτίμηση μιας συνάρτησης παραγωγής. Στην εμπειρική ανάλυση του αγροτικού τομέα το πρόβλημα αυτό παρακάμπτεται με την υπόθεση ότι η χρήση των εισροών είναι προκαθορισμένη λόγω της φύσης του προϊόντος. Μια παρόμοια υπόθεση, όμως, είναι δύσκολο να γίνει για άλλους τομείς.

Η χρήση της συνάρτησης Cobb-Douglas ή της CES έχει επίσης κατηγορηθεί ως περιοριστική. Ένα τέτοιο περιοριστικό σημείο είναι η αδυναμία να γίνει εκτίμηση με πολλές εισροές. Μια τέτοια υπόθεση έχει σαν αποτέλεσμα να μην λαμβάνονται ευθέως υπόψη οι ενδιάμεσες εισροές οπότε ολόκληρη η τεχνική μεταβολή αποδίδεται στο κεφάλαιο και την εργασία, πράγμα που δεν είναι σωστό. Όταν δεν λαμβάνονται υπόψη οι ενδιάμεσες εισροές, δε λαμβά-

νεται υπόψη η τεχνική μεταβολή που είναι ενσωματωμένη στις εισροές αυτές και επίσης η αύξηση της αποτελεσματικότητας.

Ένας τρόπος που έχει επιλεγεί για την αντιμετώπιση παρομοίων προβλημάτων είναι η αύξηση του αριθμού των εισροών στην εμπειρική εκτίμηση. Μια τέτοια λύση όμως δημιουργεί πρόβλημα διότι επεκτείνει την υπόθεση της μοναδιαίας ελαστικότητας υποκατάστασης σε ζεύγη εισροών για τα οποία δεν είναι λογικοφανής (στη συνάρτηση Cobb-Douglas) ή δημιουργεί προβλήματα εκτίμησης (στη συνάρτηση CES).

Η χρήση των ευέλικτων συναρτησιακών μορφών όπως η Translog (με τη θεωρητική βάση της συνάρτησης παραγωγής) δεν επιβάλλει κανένα από τους περιορισμούς που αναφέραμε πιο πάνω και επιπλέον δεν δημιουργεί προβλήματα στην εκτίμηση με την ύπαρξη πολλών εισροών. Επιπλέον οι συναρτήσεις Cobb-Douglas και CES μπορούν να ληφθούν σαν ειδικές περιπτώσεις της Translogs. Η ανάπτυξη όμως των ευέλικτων συναρτησιακών μορφών έχει συμβαδίσει με την ανάπτυξη της Δυϊκής Θεωρίας και η εφαρμογή τέτοιων συναρτήσεων έχει γενικευθεί κυρίως στην εμπειρική εφαρμογή της Δυϊκής Θεωρίας.

Ένα άλλο ζήτημα είναι το γεγονός ότι όλες οι παραγωγικές μονάδες παράγουν στην πραγματικότητα πολλά προϊόντα. Η συνήθης εξειδίκευση της συνάρτησης παραγωγής, που υποθέτει ένα συνολικό προϊόν, βασίζεται στην υπόθεση μιας συγκεκριμένης τεχνολογικής διάρθρωσης. Η εξειδίκευση και η εκτίμηση συναρτήσεων παραγωγής με πολλά προϊόντα είναι αρκετά δύσκολη και δεν είχε ευρεία εμπειρική χρήση (Mundlak, 1963). Οι λίγες προσπάθειες που έχουν γίνει προς την κατεύθυνση αυτή κάνουν χρήση της Constant Elasticity of Transformation (CET) συνάρτησης παραγωγής.

Η λύση των ανωτέρω προβλημάτων είναι δύσκολη στα πλαίσια της δυϊκής προσέγγισης, όπως αναπτύσσεται στη συνέχεια.

2.2. Αντιστοιχία Μεταξύ Συναρτήσεων Παραγωγής, Κόστους και Κέρδους

Είναι χρήσιμο να προχωρήσουμε στην εξέταση των ιδιοτήτων αρχίζοντας με μερικούς ορισμούς⁶. Υποθέτουμε μια παραγωγική μονάδα με n αγαθά, τα οποία μπορεί να είναι είτε προϊόντα είτε συντελεστές. Κάθε παραγωγικό σχέδιο μπορεί να απεικονισθεί με ένα διάνυσμα X στο χώρο R^n όπου

$$\begin{aligned} x_i < 0 & \text{ όταν } i \text{ είναι εισροή, και} \\ x_i > 0 & \text{ όταν } i \text{ είναι προϊόν.} \end{aligned}$$

Το σύνολο όλων των δυνατών παραγωγικών σχεδίων μπορεί να απεικονισθεί με το σύνολο $Y(X)$ όπου $X \in \mathbb{R}^n$, και το $Y(X)$ είναι γνωστό σαν Σύνολο Παραγωγικών Δυνατοτήτων. Εάν επιπλέον υπάρχουν ορισμένοι περιορισμοί με ένα διάνυσμα Z ως προς τις τιμές μερικών στοιχείων του διανύσματος X τότε περιορίζουμε αντίστοιχα και το Σύνολο των Παραγωγικών Δυνατοτήτων.

Για διευκόλυνση μπορούμε να υποθέσουμε μια παραγωγική μονάδα που παράγει ένα προϊόν y . Τότε το διάνυσμα που απεικονίζει το παραγωγικό σχέδιο ορίζεται (y, x) όπου x αντιπροσωπεύει τις εισροές και y το προϊόν. Στην ειδική αυτή περίπτωση το Σύνολο των Απαιτούμενων Εισροών ορίζεται ως:

$$Q(y) = \{X \in \mathbb{R}^n_+ : (y, x) \in Y\}$$

Το Σύνολο των Απαιτούμενων Εισροών δίνει όλους τους συνδυασμούς των εισροών που παράγουν ακριβώς y . Για παράδειγμα, η Καμπύλη Ίσων Προϊόντων είναι μια ειδική περίπτωση του Συνόλου Απαιτούμενων Εισροών και ορίζεται ως

$$Q(y) = \{ X \in \mathbb{R}^n_+ : X \in V(y) \text{ and } X \notin V(y') \text{ for } y' > y \}$$

Για το Σύνολο Απαιτούμενων Εισροών γίνονται οι εξής υποθέσεις

- κανονικότητα: το $V(y)$ είναι ένα μη-κενό, κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^n_+
- μονοτονικό: εάν $X \in V(y)$ και $x' > x$ τότε $X' \in V(y)$
- κυρτό: το $V(y)$ είναι ένα κυρτό σύνολο.

Επίσης, η συνάρτηση παραγωγής ορίζεται ως

$$f(x) = \max_y \{y : x \in V(y)\}$$

και η $f(x)$ ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

- ορισμένη στο πεδίο των πραγματικών αριθμών
- μονοτονική
- συνεχής

Ο ορισμός της συνάρτησης παραγωγής πιο πάνω έγινε με αναφορά στο χώρο των ποσοτήτων. Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σαν αφητηρία το χώρο των τιμών χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση κόστους.

Υποθέτουμε ότι η παραγωγική μονάδα αντιμετωπίζει θετικές τιμές w , όπου w είναι το διάνυσμα των τιμών των αγαθών όπως ορίστηκαν πιο πάνω, δηλαδή

$$w = (w_1, \dots, w_n).$$

Για ένα συγκεκριμένο επίπεδο παραγωγής y μπορούμε να υπολογίσουμε το κόστος c που είναι συνάρτηση των w και y , $c(w, y)$. Μεταβαλλόμενων των τιμών μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο

$$v^*(y) = \{ X \in \mathbb{R}^n_+ : w \cdot x \geq c(w, y) \text{ για κάθε } w > 0 \}$$

Η συνάρτηση κόστους ορίζεται ως:

$$c(w, y) = \min_y \{ w \cdot x : y \in EV(y) \}$$

Το σύνολο $v^*(y)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

- είναι κανονικό (κλειστό, μη-κενό)
- μονοτονικό
- κυρτό

Έχει αποδειχθεί με αυστηρή μαθηματική θεμελίωση ότι σε ένα σύνολο παραγωγικών δυνατοτήτων που ικανοποιεί ορισμένες συνθήκες κανονικότητας αντιστοιχεί μια συνάρτηση κόστους που ικανοποιεί επίσης ορισμένες συνθήκες κανονικότητας. Δηλαδή έχει αποδειχθεί ότι όταν υπάρχει μια συνάρτηση παραγωγής τότε στη συνάρτηση αυτή αντιστοιχεί μια συνάρτηση κόστους.

Η Δυϊκή Θεωρία αποδεικνύει με αυστηρή μαθηματική θεμελίωση ότι είναι σωστή και η αντίστροφη πρόταση, δηλαδή δεδομένης μιας συνάρτησης κόστους, που ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες κανονικότητας, υπάρχει ένα σύνολο παραγωγικών δυνατοτήτων τέτοιο ώστε η δεδομένη συνάρτηση είναι η συνάρτηση ελαχίστου κόστους (βλέπε McFadden, 1978). Το θεωρητικό αυτό αποτέλεσμα μας επιτρέπει να ξεκινούμε την ανάλυση από μια συνάρτηση κόστους αντί από μια συνάρτηση παραγωγής.

Η ελαχιστοποίηση κόστους μπορεί να οριστεί σαν η πρώτη φάση μιας διαδικασίας αριστοποίησης δύο φάσεων. Η δεύτερη φάση, με δεδομένο το διάνυσμα τιμών των προϊόντων, είναι η επιλογή ενός y το οποίο μεγιστοποιεί το κέρδος. Επομένως, η συνάρτηση κόστους μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μια ειδική περίπτωση της συνάρτησης κέρδους, όπου το επίπεδο του παραγομένου προϊόντος είναι σταθερό στο y .

2.3. Η Συνάρτηση Κόστους

Υποθέτουμε μια συνεχή και παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$c = g(w_1, w_2, \dots, w_n, y) \quad (1)$$

όπου c : κόστος

g : συναρτησιακή μορφή

w_i : τιμή του συντελεστή i

y : επίπεδο παραγωγής του παραγόμενου προϊόντος

Οι ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση κόστους είναι οι εξής:

- i. πεπερασμένη, θετική, ορισμένη στο πεδίο των πραγματικών αριθμών,
- ii. συνεχής,
- iii. παραγωγίσιμη,
- iv. μονοτονική στις τιμές των συντελεστών παραγωγής,
- v. ομογενής γραμμική στις τιμές των συντελεστών παραγωγής,
- vi. κοίλη, ως προς τους συντελεστές παραγωγής.

Η μονοτονική ιδιότητα ικανοποιείται όταν ικανοποιείται η ανισότητα

$$\partial c / \partial w_i > 0$$

Η ιδιότητα της συνάρτησης κόστους να είναι κοίλη ικανοποιείται όταν ο κατωτέρω Πίνακας του Hesse είναι αρνητικά ημι-ορισμένος.

$[\partial^2 c / \partial w_i \partial w_j]$: Αρνητικά ημι-ορισμένος.

Από την (1) χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Shephard μπορούμε με απλή παραγωγή να αποκτήσουμε το σύστημα των συναρτήσεων ζήτησης των συντελεστών παραγωγής, ως εξής:

$$\partial c / \partial w_i = x_i (w_1, w_2 \dots w_n, y) \quad (2)$$

όπου

x_i : ζήτηση του συντελεστή i , $i=1$ έως n

w_i : τιμή του συντελεστή i , $i=1$ έως n

Πρέπει να σημειωθεί ότι η εκτίμηση των συναρτήσεων ζήτησης συντελεστών με βάση τη συνάρτηση παραγωγής μπορεί να γίνει με τη λύση του συστήματος συνθηκών πρώτου βαθμού. Η εμπειρική λοιπόν πλευρά του Λήμματος του Shephard είναι σημαντική.

Η εκτίμηση των παραμέτρων της συνάρτησης κόστους (1) μπορεί να γίνει εναλλακτικά είτε με την απευθείας εκτίμηση της (1) είτε με την εκτίμηση του συστήματος των συναρτήσεων ζήτησης συντελεστών (2) είτε της (1) και (2)

μαζί σαν ένα σύστημα. Η επιλογή της μιας εκ των τριών εμπειρικών προσεγγίσεων εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος που ερευνάται, αλλά επίσης και από τις επιλογές του ερευνητού.

Πριν ο ερευνητής προχωρήσει στον υπολογισμό των παραμέτρων που περιγράφουν την τεχνολογία (ελαστικότητες, κλπ.) πρέπει να γίνει ο έλεγχος που επιβεβαιώνει ότι η εκτιμημένη συνάρτηση ικανοποιεί τις ιδιότητες (i)-(vi) της συνάρτησης κόστους που αναφέρθηκαν πιο πάνω.

2.4. Η Συνάρτηση Κέρδους

Υποθέτοντας ότι το επίπεδο του παραγόμενου προϊόντος y είναι μεταβλητό, η συμπεριφορά της παραγωγικής μονάδας μπορεί να περιγραφεί με την εξής συνάρτηση κέρδους

$$\pi = h(w_1, w_2, \dots, w_n, p) \quad (3)$$

όπου π : κέρδος

w_i : τιμή του i συντελεστή παραγωγής

p : τιμή του προϊόντος

Οι ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιούνται από μια συνάρτηση κέρδους είναι

- i. πεπερασμένη, θετική, ορισμένη στο πεδίο των πραγματικών αριθμών
- ii. συνεχής
- iii. παραγωγίσιμη
- iv. μονοτονική
- v. κυρτή

Η ιδιότητα της κυρτότητας ικανοποιείται όταν ο Πίνακας του Hesse είναι θετικά ημι-ορισμένος.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Shephard μπορούμε να αποκτήσουμε το σύστημα των συναρτήσεων ζήτησης των συντελεστών ως εξής:

$$-\partial\pi / \partial w_i = x_i(w_1, w_2, \dots, w_n, p) \quad (4)$$

και επίσης τη συνάρτηση προσφοράς του προϊόντος

$$\partial\pi / \partial p = y(w_1, w_2, \dots, w_n, p) \quad (5)$$

Η ομαλοποιημένη συνάρτηση κέρδους προκύπτει με ομαλοποίηση ως προς την τιμή του προϊόντος

$$\pi^* = h(w_1^*, w_2^*, \dots, w_n) \quad (6)$$

όπου $\pi^* = \pi/p$ και $w_i^* = w_i/p$.

Αν επιπλέον έχουμε μερικούς συντελεστές οι οποίοι είναι σταθεροί, π.χ. αν ο x_i είναι σταθερός, τότε έχουμε την Περιορισμένη Ομαλοποιημένη Συνάρτηση Κέρδους

$$\pi^* = h(w_1^*, \dots, w_n^*; x_i) \quad (7)$$

Οι συναρτήσεις ζήτησης των συντελεστών παραγωγής και η συνάρτηση προσφοράς προϊόντος μπορούν να προέλθουν από την (π) με απλή παραγωγή χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Shephard όπως πιο πάνω.

2.5. Ανάλυση με Περισσότερα του Ενός Προϊόντα

Τόσο στη συνάρτηση κόστους όσο και στη συνάρτηση κέρδους ανωτέρω, υποθέσαμε την ύπαρξη ενός προϊόντος. Η υπόθεση αυτή κάνει την ανάλυση πολύ πιο εύκολη. Η επέκταση σε περισσότερα του ενός προϊόντα όμως, δε δημιουργεί ούτε θεωρητικά ούτε εμπειρικά προβλήματα.

Στην περίπτωση της συνάρτησης κόστους η (1) γράφεται ως

$$c = g(w, Y) \quad (8)$$

όπου w : είναι διάνυσμα των τιμών των συντελεστών παραγωγής (n συντελεστές)
 Y : διάνυσμα των παραγομένων προϊόντων (k προϊόντα).

Εάν το προϊόν Y_k παράγεται από μια διαχωρίσιμη μη-συνδεδεμένη συνάρτηση παραγωγής τότε για κάθε Y_k ισχύει

$$c_k = g_k(w, Y_k) \quad (9)$$

Τότε το συνολικό κόστος από την παραγωγή του διανύσματος των προϊόντων Y είναι απλώς το άθροισμα του κόστους παραγωγής καθενός προϊόντος χωριστά. Επομένως, η (8) γίνεται

$$c = g(w, Y) = \sum_k g_k(w, Y_k) \quad (10)$$

Στην περίπτωση αυτή η παραγωγή των προϊόντων είναι μη-συνδεδεμένη. Εάν επιπλέον υποθέσουμε διαχωρισιμότητα της (8) μεταξύ συντελεστών και προϊόντων, τότε η συνάρτηση κόστους μπορεί να γραφεί ως

$$C = g(w, h(Y)) \quad (11)$$

Εάν υποθέσουμε επιπλέον ότι η συνάρτηση είναι γραμμική ομογενής ως προς τους συντελεστές, τότε η (11) γράφεται

$$C = g(w) \cdot h(Y) \quad (12)$$

Η συνήθης εξειδίκευση που χρησιμοποιείται στις εμπειρικές αναλύσεις είναι η γενικότερη μορφή, δηλαδή η (8).

Στην περίπτωση της συνάρτησης κέρδους η (3) γράφεται ως

$$\pi = h(w, p) \quad (13)$$

όπου w : το διάνυσμα τιμών των συντελεστών παραγωγής

p : το διάνυσμα τιμών των προϊόντων

π : κέρδος που ορίζεται όπως στην (3).

Ακολουθώντας τη γενική τακτική στην περίπτωση της συνάρτησης κέρδους με πολλά προϊόντα, υπάρχει το πρόβλημα της επιλογής ενός αγαθού που πρέπει να χρησιμοποιηθεί σαν numeraire. Στην περίπτωση αυτή συνήθως επιλέγεται ένας μη-παραγόμενος συντελεστής παραγωγής. Επιπλέον, κάθε αγαθό (συντελεστής ή προϊόν) μετράται σαν καθαρό προϊόν (netput). Επομένως, όλα τα παραγόμενα προϊόντα έχουν ένα θετικό πρόσημο, ενώ όλοι οι συντελεστές έχουν αρνητικό πρόσημο. Εάν δηλαδή το παραγωγικό σχέδιο αποτελείται από δύο συντελεστές x_1, x_2 και δύο προϊόντα x_3 και x_4 τότε το διάνυσμα των ποσοτήτων των καθαρών προϊόντων είναι:

$$x = [-x_1, -x_2, x_3, x_4]$$

Η ομαλοποίηση της (13) γίνεται με τη χρήση ενός μη-παραγόμενου συντελεστή και επομένως

$$\pi^* = h(w^*, p^*) \quad (14)$$

Η εξειδίκευση της (14) μπορεί να βασιστεί στην υπόθεση της διαχωρισιμότητας συντελεστών και προϊόντων που, όπως στην περίπτωση της συνάρτησης κόστους, συνεπάγεται

$$g(p) = h(w) \quad (15)$$

Εάν η τεχνολογία παραγωγής είναι μη-συνδεδεμένη τότε η ομαλοποιημένη συνάρτηση κέρδους γράφεται ως

$$\pi^* = \sum_i h_i(w, p_i) \quad (16)$$

Η συνήθης εξειδίκευση που χρησιμοποιείται στην εμπειρική ανάλυση είναι η συνδεδεμένη ομαλοποιημένη συνάρτηση κέρδους

$$\pi^* = h(w, p) \quad (17)$$

Όταν επιπλέον υποθεθεί ότι υπάρχουν ορισμένοι περιορισμοί στην τεχνολογία είτε με τη μορφή σταθερών συντελεστών παραγωγής, είτε επιπέδου παραγωγής προϊόντων, τότε η (17) γράφεται

$$\pi^* = h(w, p; z)$$

όπου z είναι το διάνυσμα των περιορισμών.

2.6. Ανάλυση με Πολλούς Συντελεστές Παραγωγής

Η εμπειρική ανάλυση δυσχεραίνεται όσο ο αριθμός των συντελεστών παραγωγής αυξάνει⁸. Για παράδειγμα όταν ο αριθμός των συντελεστών υπερβαίνει τους πέντε υπάρχουν πολλά προβλήματα εκτίμησης και ερμηνείας. Στην περίπτωση αυτή γίνεται χρήση της υπόθεσης της ασθενούς διαχωρισιμότητας (weak separability) που επιτρέπει το διαχωρισμό των συντελεστών σε ομάδες και την κατασκευή ενός συνεπούς συνθέτου συντελεστή για κάθε ομάδα.

Για ευκολία ας υποθέσουμε μόνο ένα προϊόν που παράγεται με μια συνάρτηση παραγωγής f που ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες κανονικότητας και έχει την εξής τεχνολογική διάρθρωση

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))$$

Εάν η g μπορεί να γραφεί με την ανωτέρω μορφή, τότε η g είναι ασθενώς διαχωρίσιμη⁹.

Δίνοντας ένα πιο συγκεκριμένο παράδειγμα, η συνάρτηση παραγωγής

$$Q = f(K_1, \dots, K_K, L_1, \dots, L_L, R_1, \dots, R_R)$$

είναι ασθενώς διαχωρίσιμη ως προς τους συντελεστές K, L, R εάν μπορεί να γραφεί ως

$$Q = f(K(K_1, \dots, K_K), L(L_1, \dots, L_L), R(R_1, \dots, R_R))$$

όπου $K(K_1, \dots, K_K)$: συνάρτηση ομαδοποίησης του K

$L(L_1, \dots, L_L)$: συνάρτηση ομαδοποίησης του L

$R(R_1, \dots, R_R)$: συνάρτηση ομαδοποίησης του R .

Ο οριακός λόγος υποκατάστασης μεταξύ του K_i και του K_j είναι ανεξάρτητος των ποσοτήτων

$$K_k, L_l, R_r \text{ όπου } k=1 \dots K, l=1 \dots L, r=1 \dots R$$

Η υπόθεση της ασθενούς διαχωρισιμότητας δεν είναι τόσο περιοριστική όσο φαίνεται εκ πρώτης όψεως. Σημαίνει απλώς ότι η επιλογή του μείγματος των συντελεστών K, L, R δεν επηρεάζει τη σύνθεση του καθενός εκ των K, L και R .

Η λύση του ζητήματος της ύπαρξης πολλών συντελεστών παραγωγής βασίζεται στην υπόθεση της ασθενούς διαχωρισιμότητας που επιτρέπει την κατασκευή συνεπών ομάδων των συντελεστών παραγωγής. Η υπόθεση αυτή υποθέτει αριστοποίηση σε φάσεις και επομένως επιτρέπει την εμπειρική εκτίμηση της τεχνολογίας παραγωγής σε φάσεις. Αυτή η επέκταση θα αναλυθεί περισσότερο στη συνέχεια.

Η υπόθεση της διαχωρισιμότητας ενδιαφέρει άμεσα την ανάλυση της τεχνολογίας παραγωγής, γιατί συνεπάγεται δύο σημαντικές απλοποιήσεις στην εμπειρική ανάλυση. Πρώτον, όταν προχωρούμε στην ομαδοποίηση συντελεστών παραγωγής υποθέτουμε την ύπαρξη διαχωρισιμότητας, δηλαδή η ύπαρξη αυτών των ομαδοποιημένων συντελεστών είναι δυνατή μόνο όταν η υπόθεση της διαχωρισιμότητας ισχύει. Αυτό το θεωρητικό αποτέλεσμα έχει ιδιαίτερη σημασία σε περιπτώσεις που οι τιμές των συντελεστών παραγωγής δε μεταβάλλονται αναλογικά και επομένως δεν ισχύει το θεώρημα του συνθέτου αγαθού του Hicks. Το δεύτερο αποτέλεσμα είναι ότι η ύπαρξη διαχωρισιμότητας επιτρέπει την εμπειρική ανάλυση να προχωρήσει σε φάσεις, αρχικά με αριστοποίηση στη σύνθεση κάθε συντελεστή και στη συνέχεια με αριστοποίηση ως προς το συνδυασμό των ομαδοποιημένων συντελεστών.

3. Χρήση σε Εμπειρικά Θέματα Τεχνολογίας Παραγωγής

Η χρήση της δυϊκής προσέγγισης μας παρέχει εναλλακτικούς τρόπους, που ουσιαστικά είναι και ευκολότεροι σε υπολογισμούς, για την εκτίμηση των παραμέτρων τεχνολογίας. Οι παράμετροι αυτοί είναι χρήσιμοι σε μια ποικιλία προβλημάτων στο χώρο της εφαρμοσμένης οικονομικής έρευνας, όπως είναι η εκτίμηση των ελαστικότητων παραγωγής, ζήτησης συντελεστών, και επίσης η μεροληπτική τεχνολογική μεταβολή, οι πηγές της αύξησης της παραγωγικότητας κλπ. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η εκτίμηση των παραμέτρων τεχνολογίας σε μια ποικιλία θεμάτων εφαρμοσμένης οικονομικής έρευνας με χρήση της δυϊκής προσέγγισης.

3.1. Εκτίμηση των Ελαστικότητων Ζήτησης Συντελεστών και Προσφοράς Προϊόντων

Οι ελαστικότητες ζήτησης συντελεστών και προσφοράς προϊόντων υπολογίζονται από την εκτιμημένη συνάρτηση κέρδους (υποθέτουμε ότι είναι η ομαλοποιημένη περιορισμένη συνάρτηση κέρδους)

$$\pi^* = \pi^*(w^*, p^*, z) \quad (18)$$

όπου w^* : το διάνυσμα ομαλοποιημένων τιμών των συντελεστών παραγωγής
 p^* : το διάνυσμα ομαλοποιημένων τιμών των προϊόντων
 z : το διάνυσμα ποσοτήτων των σταθερών συντελεστών ή προϊόντων.

Η ζήτηση για τον i συντελεστή δίνεται ως:

$$\partial \pi^* / \partial w_i = -x_i(w^*, p^*, z) \quad (19)$$

και η προσφορά για το k προϊόν δίνεται ως:

$$\partial \pi^* / \partial p_k = y_k(w^*, p^*, z)$$

Οι ελαστικότητες ζήτησης συντελεστών υπολογίζονται (παραλείποντας το $*$ για ευκολία) ως εξής:

$$e_{ij} = \partial x_i / \partial w_i \cdot w_j / x_i = \partial^2 \pi / \partial w_j \partial w_i \cdot w_j / x_i \quad (20)$$

όπου e_{ij} είναι η ελαστικότητα ζήτησης του i συντελεστή ως προς την τιμή του j συντελεστή. Επίσης

$$e_{ik} = \partial x_i / \partial p_k \cdot P_k / x_i = \partial^2 \pi / \partial w_j \partial P_k \cdot P_k / x_i \quad (21)$$

όπου e_{ik} είναι η ελαστικότητα ζήτησης του i συντελεστή ως προς την τιμή του k προϊόντος.

Οι ελαστικότητες προσφοράς προϊόντων υπολογίζονται ως εξής:

$$e_{ki} = \partial y_k / \partial \omega_i \cdot \omega_i / y_k = \partial^2 \pi / \partial P_k \partial \omega_i \cdot \omega_i / y_k \quad (22)$$

όπου e_{ki} είναι η ελαστικότητα προσφοράς του προϊόντος k ως προς την τιμή του συντελεστή i .

Επίσης

$$e_{ki} = \partial y_k / \partial P_i \cdot P_i / y_k = \partial^2 \pi / \partial P_e \partial P_i \cdot P_i / y_k \quad (23)$$

όπου e_{ki} είναι η ελαστικότητα προσφοράς του k προϊόντος ως προς την τιμή του προϊόντος e .

Είναι γνωστό ότι στην περίπτωση τεχνολογίας με περισσότερους από δύο συντελεστές η ελαστικότητα υποκατάστασης μπορεί να οριστεί με διαφορετικούς τρόπους. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των Allen-Uzawa στην περίπτωση τριών ή περισσότερων συντελεστών έχουμε

$$\sigma_{ij} = \pi \cdot \pi_{ij} / \pi_i \cdot \pi_j \quad (24)$$

όπου

σ_{ij} : ελαστικότητα υποκατάστασης μεταξύ των συντελεστών i και j

π : συνάρτηση κέρδους

π_{ij} : $\partial^2 \pi / \partial \omega_i \partial \omega_j$

π_i : $\partial \pi / \partial \omega_i$

π_j : $\partial \pi / \partial \omega_j$

Εξειδικεύοντας τη συνάρτηση κέρδους με μια συγκεκριμένη συναρτησιακή μορφή η ελαστικότητα υποκατάστασης (24) υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τις εκτιμηθείσες παραμέτρους.

3.2. Μεροληψία της Τεχνικής Μεταβολής

Το θέμα του προσδιορισμού και της μέτρησης των επιπτώσεων της τεχνικής μεταβολής έχει απασχολήσει αρκετά τη βιβλιογραφία. Παρά το γεγονός ότι υπάρχουν διάφοροι τρόποι μέτρησης της τεχνικής μεταβολής, εδώ γίνεται χρήση της προσέγγισης του Solow, όπου γίνεται διάκριση μεταξύ ενσωματωμένης και μη-ενσωματωμένης τεχνικής μεταβολής. Στη συνέχεια εξετάζεται το

ερώτημα της μεροληψίας της τεχνικής μεταβολής χρησιμοποιώντας συναρτήσεις κόστους ή κέρδους.

Η τεχνική μεταβολή μπορεί να απεικονιστεί σε μια συνάρτηση παραγωγής ως εξής:

$$Y = F(x, t), \quad \partial F / \partial t > 0 \quad (25)$$

όπου x : διάνυσμα συντελεστών παραγωγής.

Ξεκινώντας από μια συνάρτηση κέρδους έχουμε

$$\pi^* = \pi^*(w, p, t), \quad \partial \pi^* / \partial t > 0 \quad (26)$$

Λόγω της δυϊκής θεωρίας $\partial F / \partial t = \partial \pi^* / \partial t$ όταν μεγιστοποιείται το κέρδος.

Ακολουθώντας τον ορισμό της ουδετερότητας της τεχνικής μεταβολής του Hicks (1963), η ομαλοποιημένη περιορισμένη συνάρτηση κέρδους είναι ουδέτερη κατά Hicks όταν μπορεί να γραφεί

$$\pi^* = \pi^*(f(w, p), t) \quad (27)$$

Το πρακτικό αποτέλεσμα της ουδετερότητας κατά Hicks είναι ότι η τεχνική μεταβολή δεν έχει επίπτωση στην κατανομή των συντελεστών και δεν επηρεάζει τον οριακό λόγο υποκατάστασης στα διάφορα ζεύγη των συντελεστών παραγωγής.

Η μεροληψία της τεχνικής μεταβολής ορίζεται κατά Hicks ως εξής:

$$b_{ij} = \partial (\partial x_i / \partial x_j) / \partial t \quad (28)$$

όπου b_{ij} δίνει το μέτρο της αύξησης στη χρήση του συντελεστή i σε σχέση με το συντελεστή j και η τεχνική μεταβολή ονομάζεται:

Εάν $b_{ij} > 0$, τότε η μεταβολή ονομάζεται χρησιμοποιούσα τον συντελεστή i κατά Hicks.

Εάν $b_{ij} = 0$, τότε η μεταβολή ονομάζεται ουδέτερη κατά Hicks.

Εάν $b_{ij} < 0$, τότε η μεταβολή ονομάζεται εξοικονομούσα τον συντελεστή i κατά Hicks.

Στην περίπτωση μιας συνάρτησης κόστους η (28) είναι ίση με

$$b_{ij} = \partial (S_i / S_j) / \partial t = \partial \ln S_i / \partial \ln t - \partial \ln S_j / \partial \ln t \quad (29)$$

ενώ στην περίπτωση μιας συνάρτησης κέρδους είναι ίση με

$$b_{ij} = \partial^2 \pi / \partial \omega_i \cdot \partial t \cdot 1/x_i - \partial^2 \pi / \partial \omega_i \cdot \partial t \cdot 1/x_j$$

3.3. Οικονομική Αποτελεσματικότητα

Η συνάρτηση παραγωγής $f(x)$, εξ ορισμού, δίδει το μέγιστο προϊόν που παράγεται από ένα συνδυασμό συντελεστών παραγωγής, επομένως η συνάρτηση παραγωγής χαρακτηρίζει μια αποτελεσματική τεχνολογία παραγωγής. Όπως αναλύθηκε προηγουμένως μια ισοδύναμη απεικόνιση της τεχνολογίας δίνεται από τη συνάρτηση κέρδους. Επομένως και η συνάρτηση κέρδους χαρακτηρίζει μια αποτελεσματική τεχνολογία παραγωγής και για το λόγο αυτό η παρουσίαση μερικών ορισμών είναι απαραίτητη.

Ας υποθεθεί ότι μια παραγωγική μονάδα χρησιμοποιεί το παραγωγικό σχέδιο (y^0, x^0) . Ένα τέτοιο σχέδιο είναι τεχνικά αποτελεσματικό εάν

$$y_0 = f(x^0)$$

και τεχνικά μη-αποτελεσματικό (αναποτελεσματικό) εάν

$$y^0 < f(x^0)$$

Εάν μέτρο της τεχνικής μη-αποτελεσματικότητας δίνεται από

$$0 < y^0 / f(x^0) < 1$$

Η τεχνική μη-αποτελεσματικότητα οφείλεται σε υπερβολική χρήση ενός συντελεστή που φυσικά αυξάνει τη δαπάνη, επομένως

$$p \cdot y^0 - w \cdot w^0 < \pi(w, p)$$

Επιπλέον ένα σχέδιο (y^0, x^0) είναι αποτελεσματικό ως προς την κατανομή των συντελεστών εάν

$$f_i(x^0) / f_j(x^0) = \omega_i / \omega_j$$

δηλαδή ο λόγος της αξίας των οριακών προϊόντων ισούται με το λόγο των τιμών των συντελεστών. Η μη-αποτελεσματικότητα ως προς την κατανομή των συντελεστών οφείλεται στη χρήση μη-ορθών αναλογιών των συντελεστών και επομένως

$$p \cdot y^0 - w \cdot x^0 < \pi(w, p)$$

Συνεπάγεται, ότι σε μια παραγωγική μονάδα το κέρδος $p \cdot y^0 - w \cdot x^0$ συμπίπτει με το μέγιστο κέρδος $\pi(w, p)$ μόνον όταν η παραγωγική μονάδα είναι αποτελεσματική τεχνικά και επίσης αποτελεσματική ως προς την κατανομή των συντελεστών.

Εάν $p \cdot y^0 - w \cdot x_0 < \pi(w, p)$, τότε η διαφορά οφείλεται σε μη-αποτελεσματικότητα είτε τεχνική, είτε ως προς την κατανομή των συντελεστών, είτε ένα συνδυασμό και των δύο.

Θα πρέπει όμως να γίνει διάκριση από την αποτελεσματικότητα κλίμακος. Μια παραγωγική μονάδα λέγεται αποτελεσματική ως προς την κλίμακα εάν

$$p = C_y(w, y^0)$$

και μη-αποτελεσματική εάν

$$p \neq C_y(w, y_0).$$

Ο Farrell (1957) πρότεινε τους πολύ γνωστούς τρόπους μέτρησης της αποτελεσματικότητας με βάση την έννοια των frontier.

Το θέμα της σχετικής αποτελεσματικότητας έχει επίσης εξεταστεί με υποδείγματα τα οποία δεν υποθέτουν μια μονόπλευρη διάρθρωση του στατιστικού σφάλματος. Οι Lau and Yotopoulos (1971) χρησιμοποίησαν μια ομαλοποιημένη συνάρτηση κέρδους για να εξετάσουν τη σχετική οικονομική αποτελεσματικότητα δύο τύπων παραγωγικών μονάδων, μικρών και μεγάλων.

Το σύνολο του δείγματος των παραγωγικών μονάδων χωρίστηκε σε δύο τύπους παραγωγικών μονάδων με διαφορετικές συναρτήσεις παραγωγής

$$y^i = A^i f(x^i, z^i) \quad i = 1, 2 \quad (30)$$

Με την υπόθεση ότι οι δύο τύποι παραγωγικών μονάδων έχουν την ίδια τεχνολογία και επίσης ότι αντιμετωπίζουν τις ίδιες ομαλοποιημένες τιμές των συντελεστών παραγωγής τότε οι δύο παραγωγικές μονάδες, αν μεγιστοποιούν το κέρδος, πρέπει να έχουν το ίδιο ομαλοποιημένο κέρδος. Τυχόν διαφορά στο κέρδος μεταξύ των δύο τύπων των παραγωγικών μονάδων μπορεί να αποδοθεί σε διαφορά στην οικονομική αποτελεσματικότητα.

Οι όροι $A^i > 0$ στην (30) δηλώνουν την τεχνική αποτελεσματικότητα, και οι δύο τύποι παραγωγικών μονάδων έχουν ίση τεχνική αποτελεσματικότητα εάν και μόνο εάν $A^1 = A^2$

Ο έλεγχος για σχετική αποτελεσματικότητα τιμής γίνεται με χρήση των συνθηκών πρώτης τάξεως, για μεγιστοποίηση του κέρδους

$$\partial A^1 f(x^1, z^1) / \partial x^1 = k^1 w^1 \quad (31)$$

$$\partial A^2 f(x^2, z^2) / \partial x^2 = k^1 w^2 \quad (32)$$

Εάν και οι δύο τύποι παραγωγικών μονάδων είναι εξίσου αποτελεσματικοί στη χρήση των μεταβλητών εισροών (x), δηλαδή είναι εξίσου αποτελεσματικοί ως προς την τιμή, τότε $k^1=k^2$. Εάν οι δύο τύποι έχουν ίση τεχνική αποτελεσματικότητα και αποτελεσματικότητα τιμής (δηλαδή $A^1=A^2$ και $k^1=k^2$), τότε οι δύο τύποι παραγωγικών μονάδων λέγεται ότι έχουν ίση οικονομική αποτελεσματικότητα. Εάν επιπλέον, $k^1=k^2=1$, οι δύο τύποι έχουν απόλυτη αποτελεσματικότητα τιμής.

Ο έλεγχος για σχετική αποτελεσματικότητα που περιγράψαμε πιο πάνω έχει εφαρμοστεί σε πολλές εμπειρικές περιπτώσεις στα πλαίσια του αγροτικού τομέα. Μερικές απ' αυτές παρουσιάζονται από τους Yotopoulos and Lau (1979).

Οι Corp and Diewert (1982) ξεκινώντας από την έννοια του frontier, χρησιμοποιούν τη δυϊκή θεωρία και συνάγουν μέτρα τεχνικής αποτελεσματικότητας και αποτελεσματικότητας κατανομής από μια συνάρτηση κόστους. Το πλεονέκτημα της μεθοδολογίας τους είναι ότι μπορεί να επεκταθεί σε τεχνολογίες με πολλά προϊόντα.

3.4. Μεταβολές σε Συντελεστές Εισροών-Εκροών και στη Χρήση Εισροών

Πολύ νωρίς διατυπώθηκε το ερώτημα εάν οι τιμές των εισροών μεταβάλλουν τους συντελεστές εισροών-εκροών. Πολλοί ερευνητές έχουν προσπαθήσει με διάφορες μεθόδους τον έλεγχο της Υπόθεσης με πρώτο τον ίδιο τον Leontief (1951). Άλλοι ερευνητές εξέτασαν την επίδραση άλλων παραγόντων όπως την ύπαρξη σφάλματος λόγω αθροιστικοποίησης, μεταβαλλόμενη τεχνολογία του κλάδου, κλπ. στην προσπάθειά τους να εξηγήσουν τις παρατηρούμενες αλλαγές στους συντελεστές εισροών-εκροών. Ο ρόλος των σχετικών τιμών και η επίδρασή τους στις παρατηρούμενες αλλαγές δεν έχει μελετηθεί αρκετά. Η παράλειψη αυτή έχει βασιστεί στην υπόθεση ότι στην βραχυχρόνια περίοδο οι μέθοδοι της παραγωγής δεν μπορούν να μεταβάλλονται ανταποκρινόμενες στις μεταβολές των τιμών.

Οι πρώτες προσπάθειες για τον έλεγχο της επίδρασης των σχετικών τιμών έκαναν χρήση της Generalized Leontief (GL). Η Generalized Leontief συνάρ-

τηση κόστους (Diewert, 1971) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο της μεταβολής των συντελεστών εισροών-εκροών λόγω μεταβολών στις τιμές.

Απλή επέκταση των ανωτέρω ερωτημάτων είναι η διάκριση των παρατηρούμενων διαχρονικών τάσεων στη χρήση συντελεστών σε συνθετικά που οφείλονται (α) στις αλλαγές των τιμών, (β) στο επίπεδο παραγωγής, (γ) τη μεροληπτική τεχνική μεταβολή, και (γ) τη σύνθεση του τελικού προϊόντος (βλέπε Mergos, 1984 και Mergos and Yotopoulos, 1988)

4. Επιλογή Συναρτησιακής Μορφής και Στατιστική Εκτίμηση

Η επέκταση της χρήσης της δυϊκής προσέγγισης έχει συμβαδίσει με την επέκταση της χρήσης των ευέλικτων συναρτησιακών μορφών (flexible functional forms). Αν και η πρώτη εφαρμογή συνάρτησης κέρδους έγινε με χρήση της Cobb-Douglas (η οποία δεν είναι ευέλικτη μορφή), τώρα πλέον η χρήση συναρτήσεων κέρδους και κόστους είναι σχεδόν ταυτόσημη με την χρήση ευέλικτων συναρτησιακών μορφών.

Παρ' όλα αυτά, όπως είναι γενικά γνωστό στην εμπειρική έρευνα, πρέπει να τονισθεί ότι η επιλογή της συναρτησιακής μορφής εξαρτάται από τον αντικειμενικό σκοπό της συγκεκριμένης εμπειρικής ανάλυσης, τον αριθμό των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν, δηλαδή τον αριθμό των χαρακτηριστικών της τεχνολογίας που ο ερευνητής επιθυμεί να εκτιμήσει. Σαν ένα πολύ πρόχειρο παράδειγμα μπορεί να αναφέρει κανείς ότι η Cobb-Douglas δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των ελαστικοτήτων υποκαταστάσεως διότι περιορίζει όλες τις ελαστικότητες Allen να είναι ίσες με την μονάδα. Επομένως, επειδή στόχος του ερευνητή είναι η επιλογή μιας συναρτησιακής μορφής που δεν περιορίζει εκ των προτέρων τις παραμέτρους τεχνολογίας που αποτελούν αντικείμενο της έρευνας, η χρήση των ευέλικτων συναρτησιακών μορφών επεκτείνεται επειδή οι συναρτήσεις αυτές επιτρέπουν εμπειρική επαλήθευση των χαρακτηριστικών της τεχνολογίας.

Όμως, πρέπει να λεχθεί ότι η χρήση ευέλικτων μορφών έχει και αυτή τους περιορισμούς της. Η πιό σοβαρή απ' αυτούς είναι ότι οι συνήθεις γενικευμένες τετραγωνικές μορφές (Generalized Leontief, Translog και Quadratic) δεν είναι εύκολες στην παρουσίαση τεχνολογιών με το χαρακτηριστικό της διαχωρισιμότητας. Ακόμη, στην περίπτωση που οι μορφές αυτές χρησιμοποιούνται σαν προσεγγίσεις δευτέρου βαθμού (Taylor), τότε η δυνατότητα τους να απεικονίζουν την πραγματική τεχνολογία είναι περιορισμένη.

Επομένως, η σημαντικότερη συμβολή της χρήσης των ευέλικτων συναρτησιακών μορφών δεν είναι η προσεγγιστική τους ικανότητα, αλλά τό γεγονός ότι η χρήση τους επιβάλλει πολύ λιγότερους περιορισμούς στα χαρακτηριστικά της τεχνολογίας σε σύγκριση με τις παραδοσιακές συναρτησιακές μορφές Leontief, Cobb-Douglas και CES.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται σύντομα οι συναρτησιακές μορφές που είναι συνήθεις στην εμπειρική έρευνα, δηλαδή η Translog, η Normalized Quadratic και η Generalized Leontief για μια συνάρτηση κέρδους.

Με βάση την συνάρτηση κέρδους

$$\pi = G(P, Z) \quad (33)$$

όπου P είναι το διάνυσμα των τιμών και

Z είναι το διάνυσμα των σταθερών συντελεστών

τότε η Translog συνάρτηση κέρδους λαμβάνεται σαν σειρά Taylor δευτέρου βαθμού ως εξής:

$$\begin{aligned} \ln \pi = & \alpha_0 \sum_i \alpha_i \ln P_i + (1/2) \sum_i \sum_j \ln P_i \ln P_j + \sum_k b_k \ln Z_k \\ & + (1/2) \sum_i \sum_k \ln P_i \ln Z_k + \sum_k \sum_h c_{kh} \ln Z_k \ln Z_h \end{aligned} \quad (34)$$

Η Normalized Quadratic δίδεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \pi = & \alpha_0 + \sum_j b_j P_j + \sum_i \sum_j c_{ij} P_i P_j + \sum_k b_k Z_k \\ & + (1/2) \sum_k \sum_h c_{kh} Z_k Z_h + \sum_i \sum_k c_{ik} P_i Z_k \end{aligned} \quad (35)$$

Η Generalized Leontief δίδεται ως εξής

$$\pi = \sum_i \sum_j b_{ij} (P_i \cdot P_j)^{1/2} + \sum_i \sum_k c_{ik} (P_i Z_k) \quad (36)$$

όπου P και Z ορίζονται όπως στην (1).

Εφαρμόζοντας το Λήμμα του Hotelling στις (34), (35) και (36) λαμβάνονται οι συναρτήσεις ζήτησης των συντελεστών παραγωγής με απλή παραγωγή.

Κάθε μια από τις ανωτέρω συναρτησιακές μορφές έχει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα τα οποία συνδέονται με την δυνατότητα στατιστικού ελέγχου των ιδιοτήτων της τεχνολογίας¹⁰.

Η στατιστική εκτίμηση στην εμπειρική ανάλυση χρησιμοποιεί τις συναρτήσεις ζήτησης των συντελεστών που προκύπτουν από την εφαρμογή του Λήμματος Hotelling (ή Shepard) με ή χωρίς την συνάρτηση κέρδους (ή κόστους).

Η συνήθως χρησιμοποιούμενη στατιστική μέθοδος είναι η Μέθοδος της Μεγίστης Πιθανοφάνειας ή η μέθοδος Zellner (Iterative Seemingly Unrelated Regression). Η στατιστική εκτίμηση περιλαμβάνει έλεγχο της κυρτότητας (ή κοιλότητας) με την εξέταση της παραγοντοποίησης Cholesky (βλέπε Lau, 1978) του Πίνακα Hesse. Η εξέταση αυτή πρέπει να γίνεται σε κάθε παρατήρηση διότι τοπική κυρτότητα (ή κοιλότητα) δεν εξασφαλίζει γενική κυρτότητα (ή κοιλότητα). Όταν δεν ικανοποιείται η συνθήκη αυτή είναι δυνατή η επιβολή της με την μέθοδο Lau (1978), που είναι δυνατή με την πρόσφατη επέκταση της χρήσης και των ικανοτήτων των υπολογιστών.

Στις εμπειρικές αναλύσεις που έχουν γίνει σε διάφορους τομείς έχουν χρησιμοποιηθεί τόσο συναρτήσεις κόστους όσο και συναρτήσεις κέρδους, με μια ποικιλία στατιστικών στοιχείων. Ένας μεγάλος αριθμός αναλύσεων έχει γίνει με χρήση διαστρωματικών στατιστικών στοιχείων (στο επίπεδο της παραγωγικής μονάδας), ενώ ένας επίσης μεγάλος αριθμός άλλων ερευνών χρησιμοποιεί χρονολογικές σειρές στο τομεακό επίπεδο. Μέσα στην τελευταία κατηγορία (των αναλύσεων στο επίπεδο του τομέα) ένας μικρός αριθμός αναλύσεων έχει γίνει με στατιστικά στοιχεία panel (δηλαδή συνδυασμό διαστρωματικών στοιχείων με χρονολογικές σειρές).

Η πρώτη ομάδα που χρησιμοποιεί διαστρωματικά στοιχεία στο επίπεδο της παραγωγικής μονάδας περιλαμβάνει αναλύσεις που έχουν αποκλειστικά χρησιμοποιήσει τη συνάρτηση κέρδους. Ο λόγος είναι απλός. Στο επίπεδο της παραγωγικής μονάδας η μεγιστοποίηση του κέρδους, μάλλον παρά η ελαχιστοποίηση του κόστους, αποτελεί τον κανόνα συμπεριφοράς. Επομένως, το επίπεδο παραγωγής ορίζεται ενδογενώς.

Στις αναλύσεις αυτές έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορες συναρτησιακές μορφές. Οι πρώτες εφαρμογές είχαν χρησιμοποιήσει μια συνάρτηση κέρδους της μορφής Cobb-Douglas. Όπως είναι γνωστό μια Cobb-Douglas συνάρτηση παραγωγής αντιστοιχεί σε μια Cobb-Douglas συνάρτηση κέρδους (self-dual). Δεδομένης της μιας, η άλλη συνάρτηση μπορεί να βρεθεί αναλυτικά. Επίσης, είναι δυνατός ο υπολογισμός εμμέσως των ελαστικοτήτων παραγωγής, πράγμα που είναι δυνατό μόνο όταν η συνάρτηση κέρδους είναι της μορφής Cobb-Douglas. Την ιδιότητα να είναι self-dual έχει και η τετραγωνική συνάρτηση, όπου μια συνάρτηση παραγωγής τετραγωνικής μορφής μπορεί να απεικονι-

σθεί με μια συνάρτηση κέρδους τετραγωνικής μορφής. Την ιδιότητα αυτή δεν έχει η Translog. Το πλεονέκτημα, όμως, της τελευταίας είναι ότι η Cobb-Douglas αποτελεί ειδική περίπτωση της Translog και ότι ο ερευνητής έχει τη δυνατότητα να ελέγξει εάν πράγματι η τεχνολογία είναι Cobb-Douglas ή όχι.

Ένα σοβαρό πλεονέκτημα της συναρτησιακής μορφής Cobb-Douglas είναι ότι ικανοποιεί αυτόματα όλες τις ιδιότητες που απαιτούνται από μια συνάρτηση κέρδους. Αντίθετα, οι συναρτησιακές μορφές G.L., Quadratic και Translog δεν ικανοποιούν πάντα τις ιδιότητες της μονοτονικότητας και κυρτότητας (ή κοιλότητας) και πρέπει να γίνεται έλεγχος σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού των (σε κάθε σημείο των στατιστικών στοιχείων) για να είναι τα αποτελέσματα αξιόπιστα.

5. Εφαρμογές στην Ανάλυση της Τεχνολογίας Παραγωγής

Η πρώτη εμπειρική εφαρμογή της δυϊκής προσέγγισης έγινε στον αγροτικό τομέα (Lau and Yotopoulos, 1971). Από τότε οι εφαρμογές πλήθυναν σε διάφορους τομείς της οικονομίας, καλύπτοντας μια ποικιλία εμπειρικών προβλημάτων. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια επισκόπηση των εφαρμογών σε διάφορους τομείς της οικονομίας.

5.1. Επισκόπηση Εφαρμογών στον Αγροτικό Τομέα

Ο σκοπός της ανάλυσης της τεχνολογίας παραγωγής στον αγροτικό τομέα, τόσο στις αναπτυγμένες όσο και στις αναπτυσσόμενες χώρες, είναι η επιλογή μέτρων πολιτικής για την προσφορότερη διαχείριση του αγροτικού τομέα, την αύξηση της παραγωγής τροφίμων και άλλων αγροτικών προϊόντων και την αποτελεσματική χρήση των παραγωγικών πόρων.

Η εφαρμοσμένη οικονομική έρευνα στα ανωτέρω θέματα στον αγροτικό τομέα έχει σκοπό να συμβάλει στην επιλογή μεταξύ εναλλακτικών μέσων οικονομικής πολιτικής στον τομέα, όπως:

- (α) Μέτρων που μεταβάλλουν τις συνθήκες της αγοράς, όπως οι τιμές, οι φόροι και οι επιδοτήσεις,
- (β) Μέτρων που σκοπεύουν στην τεχνική μεταβολή, όπως η διάδοση των λιπασμάτων, των φυτοφαρμάκων, και η διάδοση γνώσεων,
- (γ) Μέτρων που επιδιώκουν τη θεσμική βελτίωση, όπως η βελτίωση των αγορών προϊόντων και συντελεστών, η μεταβολή του καθεστώτος γαιοκτησίας με αγροτική μεταρρύθμιση, η δημιουργία συνεταιρισμών, η βελτίωση της αγροτικής πίστης, κλπ.

Για την επιλογή μεταξύ εναλλακτικών μέσων πολιτικής είναι απαραίτητη η γνώση του μεγέθους παραμέτρων που περιγράφουν την τεχνολογία παραγωγής του τομέα όπως τα πιο κάτω.

Η ανταπόκριση στις μεταβολές των τιμών. Το ερώτημα κατά πόσον οι παραγωγικές μονάδες ανταποκρίνονται στις τιμές της αγοράς αυξάνοντας ή μειώνοντας την προσφορά έχει αποτελέσει το αντικείμενο μιας έντονης συζήτησης για πολλά χρόνια στη διεθνή βιβλιογραφία (Krishna, 1967 και 1982). Ιδιαίτερα, αυτό που έχει σημασία είναι το μέγεθος των ελαστικοτήτων τόσο της ζήτησης συντελεστών όσο και της προσφοράς προϊόντων.

Η δυνατότητα *υποκατάστασης συντελεστών παραγωγής και η διάρθρωση της τεχνολογίας.* Έχει υποστηριχθεί ότι για κάθε χώρα υπάρχει μια διαχρονική πορεία ανάπτυξης του αγροτικού τομέα που είναι άριστη όταν η διαδοχή των τεχνολογικών μεταβολών που εισάγονται στον τομέα είναι συμβιβαστή με τις διαθέσιμες ποσότητες φυσικών πόρων της χώρας, με το στάδιο ανάπτυξης της χώρας αλλά επίσης και με τις επιδιώξεις της οικονομικής πολιτικής (Johnston and Kilby, 1975). Οι εκτιμήσεις των ελαστικοτήτων υποκατάστασης μεταξύ συντελεστών και οι παράμετροι μεροληψίας της τεχνικής μεταβολής στη χρήση των συντελεστών μπορούν να διαφωτίσουν τις τεχνολογικές διαρθρώσεις στον τομέα.

Η σχετική αποτελεσματικότητα μικρών ή μεγάλων παραγωγικών μονάδων απασχόλησε ιδιαίτερα τη διεθνή βιβλιογραφία σε συνάρτηση με τη συζήτηση για την αναγκαιότητα της αγροτικής μεταρρύθμισης.

Ο έλεγχος της ιδιότητας της συμμετρίας στην ουσία ελέγχει εάν οι παραγωγικές μονάδες συμπεριφέρονται μεγιστοποιώντας το κέρδος. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της πλειονότητας των εμπειρικών διερευνήσεων, η υπόθεση της *συμπεριφοράς μεγιστοποίησης του κέρδους* γίνεται δεκτή.

Οι αναλύσεις αυτές απαντούν στο ερώτημα της *ορθολογικής συμπεριφοράς των παραγωγικών μονάδων.* Οι εκτιμώμενες ελαστικότητες προσφοράς είναι μεν μικρές (συνήθως μικρότερες της μονάδας), αλλά οπωσδήποτε θετικές, που σημαίνει ότι, τουλάχιστον, στο μικροοικονομικό επίπεδο, οι παραγωγικές μονάδες συμπεριφέρονται ορθολογικά. Επίσης οι εκτιμηθείσες ελαστικότητες ζήτησης συντελεστών υποδεικνύουν ότι η συμπεριφορά των παραγωγικών μονάδων είναι ορθολογική εφόσον οι ελαστικότητες έχουν το αναμενόμενο πρόσημο. Οι ελαστικότητες ζήτησης συντελεστών ως προς την τιμή τους είναι όλες μεγαλύτερες της μονάδας (απόλυτα) στις αναλύσεις που παρουσιάζονται από τους Yotopoulos and Lau (1979)¹¹. Αυτό όμως είναι ένα χαρακτηρι-

στικό της συνάρτησης Cobb-Douglas που χρησιμοποιήθηκε στην εμπειρική ανάλυση. Στη μελέτη των Sidhu and Baanante (1977 και 1981) οι ελαστικότητες αυτές είναι μικρότερες της μονάδας.

Ένα πολύ ενδιαφέρον εμπειρικό αποτέλεσμα των παραπάνω αναλύσεων είναι επίσης η εκτίμηση ελαστικότητας προσφοράς ως προς τις εξωγενείς μεταβολές στους σταθερούς συντελεστές παραγωγής, που δεν είναι δυνατή με τη χρήση της συνάρτησης παραγωγής. Οι ελαστικότητες αυτές παρουσιάζουν τη μεταβολή στην προσφορά μιας παραγωγικής μονάδας που προσαρμόζει τις ποσότητες συντελεστών και προϊόντος, ανταποκρινόμενη σε μια συγκεκριμένη μεταβολή στη διαθεσιμότητα των σταθερών συντελεστών. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι ελαστικότητες αυτές είναι εννοιολογικά διαφορετικές από εκείνες που θα εκτιμούντο με μια συνάρτηση παραγωγής, που υποθέτουν το επίπεδο χρήσης των άλλων συντελεστών παραγωγής ως δεδομένο.

Η ύπαρξη σταθερών οικονομικών κλίμακας είναι μια από τις βασικότερες υποθέσεις της θεωρίας της Παραγωγής. Η υπόθεση αυτή μπορεί να ελεγχθεί με τη χρήση συναρτήσεων κέρδους. Μια από τις ιδιότητες της ομαλοποιημένης περιορισμένης συνάρτησης κέρδους είναι ότι χαρακτηρίζεται από σταθερές οικονομίες κλίμακας όταν η συνάρτηση παραγωγής χαρακτηρίζεται από σταθερές οικονομίες κλίμακας και το αντίθετο. Οι εμπειρικές αναλύσεις έχουν δώσει μεικτά αποτελέσματα. Στις περισσότερες χώρες, όχι όμως σε όλες, η υπόθεση της ύπαρξης σταθερών οικονομικών κλίμακας δεν απορρίπτεται. Η διαφοροποίηση αυτή μπορεί να εξηγηθεί είτε λόγω παράλειψης μερικών συντελεστών παραγωγής στην ανάλυση, είτε λόγω ειδικών συνθηκών κάθε χώρας, ή ακόμη, πιθανόν, οφείλεται στην επιλογή της συναρτησιακής μορφής.

Οι αναλύσεις στο επίπεδο του αγροτικού τομέα με χρήση συναρτήσεων κόστους αρχικά και κέρδους αργότερα είναι πάρα πολλές. Η χρησιμοποίηση της συνάρτησης κόστους βασίζεται στην υπόθεση της συμπεριφοράς ελαχιστοποίησης του κόστους, δηλαδή το επίπεδο παραγωγής θεωρείται ότι ορίζεται εξωγενώς. Παρά την πιθανή ύπαρξη πολλών αντιρρήσεων για την ορθότητα μιας τέτοιας υπόθεσης, η χρησιμοποίησή της στην εφαρμοσμένη έρευνα έχει καθιερωθεί. Οι αναλύσεις αυτές έχουν επίσης χρησιμοποιήσει διάφορες συναρτησιακές μορφές, όπως η Translog, η Generalized Leontief, και η Quadratic. Η προτίμηση της μιας ή της άλλης συναρτησιακής μορφής γίνεται με a priori απόφαση παρά σαν συνέπεια μιας επιλογής μεταξύ εναλλακτικών μορφών. Αυτό βέβαια, μπορεί να επηρεάσει σημαντικά τις εμπειρικές εκτιμήσεις των παραμέτρων, όπως αναπτύχθηκε πιο πάνω.

Η πρώτη *ανάλυση στο επίπεδο του αγροτικού τομέα* έγινε από τον Binswanger (1974), με χρήση μιας Translog συνάρτησης κόστους. Ο Binswanger χρησιμοποίησε ένα panel στατιστικών στοιχείων (συνδυασμό χρονολογικών και διαστρωματικών) στο επίπεδο πολιτείας των Η.Π.Α. (39 πολιτείες για 4 χρονικές περιόδους). Η έρευνα αποσκοπούσε στην απάντηση του ερωτήματος της μεροληψίας της τεχνικής μεταβολής στον αγροτικό τομέα. Η χρήση της Translog συνάρτησης κόστους επέτρεψε την εκτίμηση των παραμέτρων για το διαχωρισμό της χρήσης συντελεστών σε δύο μέρη, ένα μέρος που οφείλεται σε απλή υποκατάσταση λόγω μεταβολών των τιμών, και ένα δεύτερο μέρος που οφείλεται στη μεροληψία της τεχνικής μεταβολής. Αυτός ο διαχωρισμός είναι δυνατός μόνο με μια συναρτησιακή μορφή η οποία επιτρέπει την εκτίμηση παραμέτρων υποκατάστασης συντελεστών.

Ο Lopez (1980) χρησιμοποίησε μια Generalized Leontief συνάρτηση κόστους και χρονολογικά στοιχεία (1946-1977) από τον Καναδά, όπου εξέτασε τα ερωτήματα της *δυνατότητας υποκατάστασης συντελεστών και της επίδρασης της τεχνικής μεταβολής* στη ζήτηση των συντελεστών κεφαλαίου, εργασίας και ενδιάμεσων εισροών. Σε πιο μεταγενέστερη έρευνα ο Lopez (1982) χρησιμοποίησε επίσης μια Generalized Leontief συνάρτηση κόστους με τα ίδια στατιστικά στοιχεία, όπου εξετάζει τις επιπτώσεις της μεταβολής της τιμής του πετρελαίου στον αγροτικό τομέα.

Ο Antle (1984) εξετάζει παρόμοια ερωτήματα για τον αγροτικό τομέα των Η.Π.Α. χρησιμοποιώντας χρονολογικά στοιχεία (1910-1978) και μια συνάρτηση κέρδους μορφής Translog. Επιπλέον ελέγχει εμπειρικά τα χαρακτηριστικά της τεχνολογίας του αγροτικού τομέα, όπως η ύπαρξη διαρθρωτικής μεταβολής στην περίοδο που εξετάζεται, η ομοθετικότητα και η μεροληπτικότητα της τεχνικής μεταβολής. Ιδιαίτερης σημασίας είναι τα εμπειρικά αποτελέσματα που υποδεικνύουν ότι παρατηρείται μια μείωση των ελαστικότητας προσφοράς προϊόντων και ζήτησης συντελεστών μετά το 1950, επομένως η προσφορά προϊόντων και η ζήτηση συντελεστών ανταποκρίνονται λιγότερο στις μεταβολές των τιμών και περισσότερο στην τεχνική μεταβολή ή στην ένταση κεφαλαίου της τεχνολογίας.

Όλες οι αναλύσεις που εξετάστηκαν πιο πάνω ακολουθούν την καθιερωμένη υπόθεση της ύπαρξης ενός συνθέτου προϊόντος. Παρά το γεγονός ότι έγιναν διάφορες προσπάθειες για την εκτίμηση εμπειρικών υποδειγμάτων με περισσότερα από ένα προϊόντα η εφαρμογή τους παρέμεινε περιορισμένη. Με την ανάπτυξη της δυϊκής προσέγγισης απεδείχθη ότι είναι δυνατή η εισαγωγή περισσότερων από ένα προϊόντων τόσο στις συναρτήσεις κόστους (Hall, 1972) όσο και στις συναρτήσεις κέρδους (Lau, 1973). Η εφαρμογή των θεωρητικών *mīTīiv* «ποτελεπιάτων στον αγροτικό τομέα δεν καθυστέρησε. Οι Weaver

(1982 και 1983) και Shumway (1983) άρχισαν με εφαρμογή μιας συνάρτησης κόστους με δύο προϊόντα και ο Mergos (1991) με μια συνάρτηση κέρδους με πολλά προϊόντα.

Ο Weaver (1983) χρησιμοποιεί μια Translog συνάρτηση κέρδους εκτιμημένη με διαχρονικά στοιχεία (1950-1970) για δύο πολιτείες των Η.Π.Α. Στη μελέτη αυτή ο Weaver επιδιώκει την εκτίμηση «συνεπών», όπως τις ονομάζει, ελαστικότητας προσφοράς προϊόντων και ζήτησης συντελεστών. Οι παλαιότερες αναλύσεις προσφοράς βασίζονται κυρίως στην εκτίμηση υποδειγμάτων προσφοράς, που συνήθως αγνοούσαν είτε την προσφορά των άλλων προϊόντων είτε τη ζήτηση συντελεστών. Επιπλέον δεν έκαναν χρήση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την οικονομική θεωρία και επιβάλλουν περιορισμούς στη σχέση των ελαστικότητας. Στην ανάλυση διακρίνονται τρία προϊόντα (σιτηρά για τρόφιμα, σιτηρά για ζωοτροφές, κτηνοτροφικά προϊόντα) και πέντε συντελεστές παραγωγής (εργασία, λιπάσματα, κεφάλαιο, ενδιάμεσες εισροές και προϊόντα πετρελαίου), ενώ η συνολική γη διαθέσιμη για καλλιέργεια θεωρήθηκε σταθερός συντελεστής.

Ο Shumway (1983) χρησιμοποιεί διαχρονικά στοιχεία μιας πολιτείας των Η.Π.Α. (1957-1979) και μια ομαλοποιημένη τετραγωνική συνάρτηση κέρδους στην οποία διακρίνει έξι προϊόντα, δύο μεταβλητούς συντελεστές και δύο σταθερούς συντελεστές (γη και οικογενειακή εργασία). Διαπιστώνει ότι η παραγωγή δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως μη-συνδεδεμένη (υπόθεση η οποία είναι απαραίτητη για να είναι δυνατή η ομαδοποίηση σε ένα προϊόν). Χρησιμοποιεί εναλλακτικά την Translog για τον έλεγχο χαρακτηριστικών της τεχνολογίας που δεν μπορούν να ελεγχθούν με την τετραγωνική (ομογένεια).

Το βασικότερο πρόβλημα των εκτιμήσεων του Shumway είναι ότι όλα τα παραδείγματα που εκτίμησε δεν ικανοποιούν την απαιτούμενη ιδιότητα της κυρτότητας για τη συνάρτηση κέρδους. Αυτό δεν θα ήταν πρόβλημα εάν η κυρτότητα είχε επιβληθεί εκ των υστέρων. Όμως χωρίς την επιβολή της κυρτότητας τα αποτελέσματα χάνουν αυτό ακριβώς το χαρακτηριστικό στο οποίο η μέθοδος υπερέρχει, δηλαδή τη συνέπεια με τη θεωρία.

Η ανάλυση για τον ελληνικό αγροτικό τομέα (Mergos, 1991) παρουσιάζει αποτελέσματα με σημαντικές επιπτώσεις πολιτικής, κυρίως ως προς την εφαρμοσθείσα πολιτική τιμών, την επέκταση των αρδεύσεων και την πολιτική ως προς τους υποτομείς της φυτικής και ζωικής παραγωγής.

Άλλες εφαρμογές είναι η ανάλυση του Kuroda (1988) για την Ιαπωνία και Huang (1991) για την βιομηχανία τροφίμων των ΗΠΑ. Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει συνοπτικά επιλεγμένες εφαρμογές στον αγροτικό τομέα.

Πίνακας 1
Εφαρμογές στον Αγροτικό Τομέα

Έρευνα	Συνάρτηση	Συναρτησιακή Μορφή	Στοιχεία	Χώρα
Lau and Yotopoulos (1971)	Profit	C-D	grouped cross-section	India
Yotopoulos, Lau and Lin (1976)	Profit	C-D	grouped cross-section	Taiwan
Sidhu and Baanante (1981)	Profit	C-D	farm-level	India
Kuroda (1979)*	Profit	Translog	grouped cross-section	Japan
Lerttamrab et al. (1979)*	Profit	Quadratic	farm-level	Thailand
Somel (1979)*	Profit	C-D	farm-level	Turkey
Sidhu and Baanante (1981)	Profit	Translog	farm-level	India
Binswanger (1974)	Cost	Translog	pooled cs/ts	U.S.A.
Lopez (1980), (1982) and (1984)	Cost	G.L.	time-series	Canada
Weaver (1982) and (1983)	Profit	Translog	pooled cs/ts	U.S.A.
Ray (1982)	Cost	Translog	time-series	U.S.A.
Shumway (1983)	Profit	Quadratic	time-series	U.S.A.
Antle (1984)	Profit	Translog	time-series	U.S.A.
Binswanger and Quison (1985)	Profit	Translog	pooled cs/ts	India
Mergos (1984)	Cost	Translog	time-series	Greece
Mergos and Yotopoulos (1988)	Cost	Translog	time-series	Greece
Kuroda (1988)	Cost	Translog	time-series	Japan
Mergos (1991)	Profit	Translog Quadratic	time-series	Greece
McTutoch and Shumway (1991)	Profit	Quadratic	time-series	U.S.A.
Huang (1991)	Cost	Translog	time-series	U.S.A.

* περιλαμβάνονται στον τόμο Yotopoulos and Lau (editors) (1979).

5.2. Εφαρμογές στους Τομείς της Ενέργειας και της Βιομηχανίας

Οι εφαρμογές της δυϊκής προσέγγισης στην ανάλυση της τεχνολογίας παραγωγής στην βιομηχανία και την ενέργεια είναι πάρα πολλές. Συγκεκριμένα, η επέκταση της δυϊκής προσέγγισης υπήρξε αλματώδης μετά τα μέσα της δεκαετίας του 1970, κυρίως σαν αποτέλεσμα της ανάγκης για εξοικονόμηση ενέργειας, λόγω της αύξησης των τιμών πετρελαίου και για εμπειρική ανάλυση της ζήτησης ενέργειας, τόσο στο επίπεδο της οικονομίας όσο και στο επίπεδο της βιομηχανίας ή συγκεκριμένων κλάδων.

Η έντονη μεθοδολογική προσπάθεια στην περίοδο αυτή προς την κατεύθυνση αυτή και η εκτεταμένη χρήση της δυϊκής προσέγγισης στην ανάλυση της τεχνολογίας παραγωγής, με αντικειμενικό σκοπό την εκτίμηση των δυνατοτήτων υποκατάστασης της ενέργειας, παρουσιάζεται από τους Berndt and Field (1981) στο βιβλίο τους *Modeling and Measuring Natural Resource Substitution*. Όπως ελέχθη πιο πάνω η εκτίμηση των ελαστικότητας υποκατάστασης διευκολύνεται με την χρήση ευέλικτων συναρτησιακών μορφών και της δυϊκής προσέγγισης στην εμπειρική ανάλυση. Πράγματι, αυτή ήταν και η γενική τάση με αποτέλεσμα να υπάρξουν πάρα πολλές εφαρμογές κυρίως της Translog συνάρτησης κόστους στην ζήτηση καυσίμων με εκτίμηση των ελαστικότητας υποκατάστασης και των παραμέτρων μεροληπτικής τεχνικής μεταβολής.

Μια πρώτη παρόμοια εφαρμογή ήταν των Berndt and Wood (1975), και ακολούθως του Fuss (1977) για την ζήτηση καυσίμων στην βιομηχανία του Καναδά. Ο Fuss πρωτοτυπεί επίσης με την υπόθεση της διαχωρισιμότητας (separability) και εκτιμά την ζήτηση ενέργειας σε δύο στάδια. Επίσης ο Lopez (1982) εξετάζει την ζήτηση ενέργειας στον Καναδά κάνοντας χρήση μιας συνάρτησης Generalized Leontief.

Οι εφαρμογές στον τομέα της ενέργειας συνεχίζονται. Ο Pindyck (1985) επιχειρεί μια σύγκριση σε διεθνές επίπεδο, ο Hall (1986) για τις χώρες του OECD, οι Vlahou and Samouilidis (1986) εξετάζουν την ζήτηση ενέργειας στην ελληνική βιομηχανία, ο Najmabadi (1987) εξετάζει την ζήτηση ενέργειας στην βιομηχανία των Η.Π.Α. και ο Hargrey (1991) για το U.K. Επίσης, ο CourSIDINE (1989) εξετάζει το θέμα της συναρτησιακής μορφής στα πλαίσια της ανάλυσης της ζήτησης ενέργειας.

Όμως, υπάρχουν και άλλες εφαρμογές στην βιομηχανία όπως των Williams and Kwon (1982) που χρησιμοποιεί μια Translog συνάρτηση κόστους για την εκτίμηση των ελαστικότητας υποκατάστασης μεταξύ των συντελεστών

παραγωγής για επτά κλάδους της βιομηχανίας της Κορέας. Πρόσφατα έχει γίνει χρήση των ευέλικτων μορφών στην ανάλυση της υποκατάστασης μεταξύ μετάλλων στην βιομηχανία (Priovolos and Dunietz, 1987 και Qian, 1990).

5.3. Λοιπές Εφαρμογές

Πρόσφατα παρουσιάζεται μια επέκταση της χρήσης των συναρτήσεων κόστους στην ανάλυση της υποκατάστασης μεταξύ νομισματικών στοιχείων (monetary assets) και άλλων τραπεζικών και νομισματικών θεμάτων (Seretis, 1988 καθώς επίσης Gupta and Moazzami, 1990) και σε άλλα θέματα (Bajik, 1991).

Επίσης είναι γνωστή η σημασία της μεθόδου στον διαχωρισμό των διαφορετικών συστατικών της οικονομικής μεγέθυνσης και της παραγωγικότητας. Για παράδειγμα ο Nakamura (1989) εξετάζει κατά πόσον η διαφορά στο κόστος μεταξύ Γερμανίας, Ιαπωνίας και ΗΠΑ οφείλεται στην μεταβολή της παραγωγικότητας ή στην μεταβολή των τιμών των συντελεστών παραγωγής.

5.4. Αξιολόγηση της Εμπειρίας

Τα τελευταία χρόνια οι εφαρμογές των συναρτήσεων κέρδους και κόστους γίνονται πολυπληθέστερες. Ο συνδυασμός της δυϊκής θεωρίας, της χρήσης των ευέλικτων συναρτησιακών μορφών και οι εξελίξεις στην χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών διευκολύνουν την εκτίμηση συστημάτων προσφοράς προϊόντων και ζήτησης συντελεστών, που ήταν ιδιαίτερα δύσκολη διαδικασία παλαιότερα. Ήδη έχουν υπάρξει προσπάθειες για την επέκταση των συστημάτων αυτών και τη χρήση τους για την αξιολόγηση εναλλακτικών επιλογών πολιτικής. Πριν, επομένως, αρχίσει η εφαρμογή των αποτελεσμάτων αυτών είναι φυσικό να διερωτάται κανείς ποια είναι η αξιοπιστία των εκτιμήσεων αυτών.

Πολύ λίγες προσπάθειες έχουν γίνει προς αυτή την κατεύθυνση. Ο Appelbaum (1978) προσπαθεί να αξιολογήσει τις εκτιμήσεις της δυϊκής προσέγγισης και συμπεραίνει ότι σε πολλά σημεία οι εμπειρικές εκτιμήσεις δεν είναι συνεπείς με τη θεωρία. Μερικές φορές αυτές οι ασυνέπειες μπορούν να παρουσιαστούν με «λάθος» πρόσημο ορισμένων παραμέτρων (όπως π.χ. η μεγάλη συζήτηση για την ύπαρξη συμπληρωματικότητας ή ανταγωνιστικότητας μεταξύ συντελεστών κεφαλαίου και ενέργειας).

Στις εκτιμήσεις για τον αγροτικό τομέα που παρουσιάστηκαν πιο πάνω υπάρχουν πολλές περιπτώσεις παρόμοιων προβλημάτων. Πολλά προβλήματα

βεβαίως μπορούν να οφείλονται στην εξειδίκευση των υποδειγμάτων, την επιλογή της συναρτησιακής μορφής ή ακόμη και στα στατιστικά δεδομένα.

Όμως σε αρκετές περιπτώσεις αυτά οφείλονται σε μη ικανοποίηση των ιδιοτήτων των συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα στην εργασία του Shumway (1983), όπου δεν ικανοποιείται η ιδιότητα της κυρτότητας. Το ίδιο πρόβλημα παρουσιάζει η εργασία του Lopez (1984). Ο Lau (1978) υποδεικνύει ότι οι ιδιότητες της μονοτονικότητας και κυρτότητας (ή κοιλότητας) μπορούν να επιβληθούν, οπότε οι ελαστικότητες που προκύπτουν θα είναι συνεπείς με τη Θεωρία της Παραγωγής.

Συμπερασματικά, συνάγεται ότι έχουν γίνει αρκετές εμπειρικές αναλύσεις σε διάφορους τομείς με χρήση συναρτήσεων κέρδους και κόστους. Όμως, τονίζεται ότι σε πολλές περιπτώσεις η εμπειρική αξία των εκτιμημένων παραμέτρων είναι μειωμένη επειδή δεν ικανοποιούνται στην εμπειρική εκτίμηση μερικές απαραίτητες ιδιότητες των συναρτήσεων (κυρίως η ιδιότητα της κυρτότητας). Θεωρητικά, η λύση στο πρόβλημα έχει προταθεί από τον Lau (1978). Όμως εμπειρικά η επιβολή των περιορισμών είναι αρκετά δύσκολη. Για το λόγο αυτό οι εκτιμήσεις των παραμέτρων, ιδιαίτερα όταν δεν ικανοποιούνται οι ιδιότητες των συναρτήσεων, θα πρέπει να χρησιμοποιούνται με ιδιαίτερη προσοχή.

6. Συμπεράσματα

Η πρόσφατη διάδοση της εφαρμογής της δυϊκής προσέγγισης στην εμπειρική ανάλυση τομέων της οικονομίας κάνει απαραίτητη μια σύντομη επισκόπηση της μέχρι τώρα εμπειρίας. Ο σκοπός της επισκόπησης αυτής ήταν να παρουσιάσει σύντομα, κατά το δυνατόν χωρίς μαθηματική γλώσσα, τη θεωρητική βάση της δυϊκής προσέγγισης και τη σύνδεση της με την παραδοσιακή προσέγγιση της συνάρτησης παραγωγής. Στην αρχή έγινε μια πολύ σύντομη παρουσίαση της θεωρητικής βάσης της δυϊκής προσέγγισης της τεχνολογίας παραγωγής και στη συνέχεια έγινε παρουσίαση των κυριότερων εμπειρικών ερωτημάτων στη λύση των οποίων η συμβολή της προσέγγισης είναι ουσιαστική. Η επισκόπηση τελειώνει με μια παρουσίαση των εφαρμογών στους διάφορους τομείς της οικονομίας.

Αναμφισβήτητη η χρήση των συναρτήσεων κέρδους και κόστους διευρύνει το πεδίο εφαρμογής της εφαρμοσμένης οικονομικής έρευνας στην ανάλυση της τεχνολογίας της παραγωγής. Πολλά προβλήματα όμως παραμένουν, τα οποία μειώνουν την αξιοπιστία των παραμέτρων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην επιλογή αποφάσεων πολιτικής. Τα πλέον σοβαρά μειονεκτήματα

συνδέονται με την *a priori* επιλογή της συναρτησιακής μορφής και τη μη ικανοποίηση ορισμένων ιδιοτήτων όπως η καμπυλότητα από τις εκτιμηθείσες συναρτήσεις. Θα πρέπει όμως να σημειωθεί ότι οι εκτιμήσεις τέτοιων παραμέτρων με την παραδοσιακή προσέγγιση πιθανόν να έχουν ακόμη λιγότερη αξιοπιστία στις λίγες περιπτώσεις που μπορούν να εκτιμηθούν.

Η χρήση των συναρτήσεων κέρδους και κόστους έχει διευρύνει σημαντικά τον ορίζοντα της εφαρμοσμένης οικονομικής ανάλυσης. Τα ερωτήματα που αφορούν τη διάρθρωση της τεχνολογίας και που είναι δυνατό να απαντηθούν χωρίς περιοριστικές *a priori* υποθέσεις αυξήθηκαν ουσιαστικά. Η σημαντικότερη ίσως συμβολή αφορά την εφαρμογή της διαχωρισιμότητας (*separability*), τόσο στην πλευρά των συντελεστών παραγωγής όσο και στην πλευρά των προϊόντων.

Υποσημειώσεις

1. Μια παλαιότερη μορφή του άρθρου αυτού υπήρξε αντικείμενο διάλεξης του συγγραφέα στο Κέντρο Προγραμματισμού και Οικονομικών Ερευνών (16 Μαΐου 1986).
2. Μια εκτεταμένη παρουσίαση της εφαρμοσμένης ανάλυσης της παραγωγής δίδεται από τους Fuss and McFadden 1978.
3. Στο άρθρο αυτό δεν είναι δυνατή η πλήρης παρουσίαση της δυϊκής προσέγγισης. Αντίθετα, γίνεται μια πολύ σύντομη επισκόπηση για κατανόηση των στοιχείων της προσέγγισης, ώστε να είναι δυνατή η επισκόπηση των εμπειρικών εφαρμογών. Μια λεπτομερής ανάλυση της μεθόδου δίδεται από τον Chambers (1988). Για την θεωρητική θεμελίωση της δυϊκής προσέγγισης βλέπε Σαρρή (1986).
4. Βλέπε για εκτενέστερη ανάλυση την πληρέστατη μονογραφία των Fuss, McFadden and Mundlak (1978).
5. Βλέπε Christensen, Jorgenson, and Lau (1973).
6. Βλέπε για μια αναλυτική παρουσίαση Chambers (1988) σελ. 82-92 και σελ. 137-148.
7. Η υπόθεση της μη συνδεδεμένης παραγωγής μπορεί να ελεγχθεί στατιστικά. Βλέπε Livenois and Ryan (1989) και Mergos (1991).
8. Είναι γνωστό πρόβλημα της ομαδοποίησης των συντελεστών παραγωγής και της υπόθεσης της διαχωρισιμότητας. Βλέπε Berndt and Christensen (1973).
9. Η υπόθεση αυτή χρησιμοποιείται από τους Fuss (1977, Mergos (1984) και Mergos and Yotopoulos (1988 για εμπειρικές εκτιμήσεις της παραγωγής ζήτησης ενέργειας και δημητριακών.
10. Για μια εφαρμογή των τριών αυτών συναρτησιακών μορφών βλέπε Mergos (1991), σελ. 55-59.
11. Στον συλλογικό τόμο Yotopoulos and Lau (1979) παρουσιάζεται η εμπειρία από μια σειρά εμπειρικές εφαρμογές της συνάρτησης κέρδους στον αγροτικό τομέα σε διάφορες χώρες (βλέπε Πίνακα 1) και γίνεται προσπάθεια για συνολική εκτίμηση των αποτελεσμάτων.

Βιβλιογραφία

- Akridge, T. T.* (1989) "Measuring Productive Efficiency in Multiple Product Agribusiness Firms: A Dual Approach" *Amer. J. of Agricultural Economics*, Vol. 71, No 1, pp. 116-125.
- Anderson, R. A. and Thursby, J. G.* (1986) "Confidence Intervals for Elasticity Estimators in Translog Models", *Review of Economics and Statistics*, Vol. 68, 1986, pp. 647-656.
- Antle, J. M.* (1984) "The Structure of U.S. Agricultural Technology, 1910-1978", *Amer. J. Agr. Econ.*, 66:414-421.
- Bajik, V.* (1991) "The Structure of Production in Urban Housing: A Multi-Input Cost Function Approach" *Applied Economics*, Vol. 23, No. 3, pp. 447-458.
- Berndt, E. R. and Christensen, L. R.* (1973) "The Internal Structure of Functional Relationships: Separability, Substitution, and Aggregation," *Rev. Econ. Stud.*, 40 (July 1973): 403-410.
- Berndt, E. R. and Field, B. C.* (1981) *Modeling and Measuring Natural Resource Substitution*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- Berndt, E. R. and Wood, D. O.* (1975) "Technology, Prices, and the Derived Demand for Energy," *Rev. Econ. Statist.*, 57 (Aug. 1975): 259-268.
- Binswanger, H. P.* (1974) "The Measurement of Technical Change Biases with Many Factors of Production", *American Economic Review*, 64(6): 964-976.
- Binswanger, H. P.* (1974) "A Cost Function Approach to the Measurement of Factor Demand Elasticities and of Elasticities of Substitution", *Amer. J. Agr. Econ.*, 56 (May 1974): 377-386.
- Brown, R. S. Caves, D. W., Christensen, L. R.* (1979) "Modelling the Structure of Cost and Production for Multiproduct Firms", *Southern Economic Journal*, 16(1): 256-273.
- Chambers, R. G.* (1982) "Duality. The Output Effect and Applied Comparative Statics", *American Journal of Agricultural Economics*, 64 (1): 152-156.
- Chambers, R. G.* (1988) *Applied Production Analysis: A Dual Approach*, Cambridge University Press, Cambridge,
- Chotigeat, T.*, (1980) "The Translog Function and the Substitution of Capital, Fertilizer and Labour in Developing Countries", *Indian Journal of Economics*, 60:259-280.
- Christensen, L. R. and Caves, P. W.* (1980) "Global Properties of Flexible Functional Forms", *American Economic Review*, Vol. 70, 1980, pp. 322-332.
- Christensen, L. D. and Jorgenson, D. W.* (1969) "The Measurement of U.S. Real Capital Input, 1929-1969", *Rev. Income and Wealth*. 15(4): 293-320.
- Considine, T. J.* (1989) "Separability, Functional Form and Regulatory Policy in Models of Inter-fuel Substitution", *Energy Economics*, Apr. 1989, Vol. 11, No 2, pp. 82-94.
- Diewert, W. F.* (1971) "An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function, *Journal of Political Economy* 79: 481-507.

- Diewert, W. E. and Wales, T. S.* (1987) "Flexible Functional Forms and Global Curvature Conditions", *Econometrica*, Vol. 55, No. 1, Jan. 1987, pp. 43-68.
- Farrell, M. J.* (1957) "The Measurement of Productive Efficiency", *Journal of the Royal Statistics Society*, 253-281.
- Fuss, M.* (1977) "The Demand for Energy in Canadian Manufacturing: An Example of the Estimation of Production Structures with Many Inputs", *J. Econometrics*, 5 (Jan. 1977): 89-116.
- Fuss, M. and McFadden, D.*, eds. (1978) "Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications". Amsterdam: North Holland.
- Fuss, M.; McFadden, D.; and Mundlak, K.*(1978) "A Survey of Functional Forms in the Economic Analysis of Production", in *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, by M. Fuss and D. MacFadden, eds., Amsterdam: North Holland.
- Gupta, K. L. and Moazzami, B.* (1990) "Nominal vs. Real Adjustment in Demand for Money Functions" *Applied Economics*, Vol. 22, No. 1, pp. 5-12.
- Hall, R. E.* (1973) "The Specification of Technology with Several Kinds of Output", *J. of Polit. Econ.* 81 (August 1973): 878-892.
- Hall, V. B.* (1986) "Major OECD Country Industrial Sector Interfuel Substitution Estimates, 1960-1970", *Energy Economics*, Vol. 8, No. 2, April 1986, pp. 74-89.
- Harrey, A. C. and Marshall, P.* (1991) "Interfuel Substitution, Technical Change and the Demand for Energy in the U.K. Economy" *Applied Economics*, Vol. 23, No. 6, pp. 1077-1086.
- Huang, K.* (1991) "Factor Demands in the U.S. Food Manufacturing Industry", *Amer. J. of Agricultural Economics*, Vol. 73, No. 3, pp. 615-620.
- Kopp, R. J., Diewert, W. E.* (1982) "The Decomposition of Frontier Cost Function Deviation Into Measures of Technical and Allocative Efficiency", *Journal of Econometrics*, 19 (2).
- Kuroda, Y.* (1988) "Biased Technological Change and Factor Demand in Postwar Japanese Agriculture, 1958-1984" *Agricultural Economics*, Vol. 2, No. 2, pp. 101-122.
- Lau, L. J.* (1972) "Profit Functions of Technologies With Multiple Inputs and Outputs", *Rev. Econ. Statist.* 54 (August 1972): 281-289.
- Lau, L. J.* (1976) "A Note on the Elasticity of Substitution Functions", *Rev. Econ. Stud.*, 43 (June 1976): 353-358.
- Lau, L. J.* (1976) "A Characterization of the Normalized Restricted Profit Function", *J. Econ. Theory*, 12:131-163.
- Lau, L. J.* (1978) "Testing and Imposing Monotonicity, Convexity and Quasi-Convexity Constraints" in *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*. by M. Fuss and D. McFadden, eds. Amsterdam: North Holland.
- Lau, L. J.* (1978) "Applications of Profit Functions" in *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, by M. Fuss and D. McFadden, (eds), North Holland.

- Lau, L. J. and Yotopoulos, P. A.* (1971) "A Test for Relative Efficiency and Application to Indian Agriculture", *Amer. Econ. Rev.* 61 (March 1971): 94-109.
- Lau, L. J.* (1972) "Profit, Supply and Factor Demand Functions", *Amer. J. Agr. Econ.* 54 (Feb. 1972): 11-18.
- Livernois, J. R. and Ryan, D. L.* (1989) "Testing for Non-jointness in Oil and Gas Exploration: A Variable Profit Function Approach", *International Economic Review*, May 1989, Vol. 30, No. 2, pp. 479-504.
- Lopez, R. E.* (1980) "The Structure of Production and the Derived Demand for Inputs in Canadian Agriculture", *Amer. J. Agr. Econ.* 62 (Feb. 1980): 38-45.
- Lopez, R. E.* (1982) "Analysis of a Small Open Economy: The Case of Energy Prices in Canada", *American Journal of Agricultural Economics*, 62(3): 511-519.
- Lopez, R. E.* (1984) "Estimating Substitution and Expansion Effects Using a Profit Function Framework", *Amer. J. Agr. Econ.*, 66:358-367.
- McFadden, D.* (1978) "Cost, Revenue, and Profit Functions" in *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, by M. Fuss and D. McFadden, eds. Amsterdam: North Holland.
- McTutosh, C. S. and Shumway, C. R.* (1991) "Multiproduct Production Choices and Policy Responses" *Western J. of Agr. Economics*, Vol. 16, No. 1, pp. 291-303.
- Mergos, G. J.* (1984) "Price, Technical Change and Output Composition Effects on Derived Demand for Grains: A Cost Function Approach", Unpublished Ph. D. Dissertation, Stanford University, Stanford, California, 1984.
- Mergos, G. J.* (1991) "Output Supply and Input Demand in Greek Agriculture: A Multi-Output Profit Function Approach", *Studies No. 6*, Centre of Planning and Economic Research, Athens, Greece.
- Mergos, G. J. and Yotopoulos, P. A.* (1988) "Demand for Feed Inputs in the Greek Livestock Sector", *European Review of Agricultural Economics*, Vol. 15, No. 1, pp. 1-17.
- Mundlak, Y.* (1963) "Specification and Estimation of Multiproduct Production Functions", *Journal of Farm Economics*, 45: 433-442.
- Najmabadi, F. and Imran, M.* (1987) "Energy Demand in the U.S. Manufacturing Sector", Division Working Paper No. 1987-5, International Commodity Markets Division, The World Bank.
- Nakamura, S.* (1989) "Productivity and Factor Prices as Sources of Differences in Production Costs between Germany, Japan and the U.S.", *Economic Studies Quarterly*, March 1989, Vol. 40, No. 1, pp. 75-89.
- Pindyck, R. S.* (1979) "Interfuel Substitution and the Industrial Demand for Energy: An International Comparison", *Rev. Econ. Stat.*, 61 (May 1979): 169-179.
- Pindyck, R. S.* (1985) "Interfuel Substitution and the Industrial Demand for Energy: An International Comparison", *Review of Economics and Statistics*, Vol. 67, 1985, pp. 630-639.

- Priovolos, T. and Dunietz, T.* (1987) "Substitutability of Metals in U.S. Industry". Division Working Paper No. 1987-11, International Commodity Markets Division. The World Bank.
- Qian, Y.* (1990) "Application of Flexible Functional Forms to Substitutability among Metals in U.S. Industries", WPS 357, Febr. 1990, The World Bank.
- Ray, G. E.* (1982) "A Translog Cost Function of U.S. Agriculture, 1939-1977", *Amer. J. Agr. Econ.* 64 (Aug. 1982): 490-498.
- Σαρχής, Α. Ι.* (1986) "Παραδόσεις Μαθηματικής Οικονομικής", τομ. Α', Gutenberg, Αθήνα.
- Seretis, A.* (1988) "Translog Flexible Functional Form and Substitutability of Monetary Assets", *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 6, No. 1, Jan. 1988, pp. 59-67.
- Sidhu, S. S., Baanante, C. A.* (1977) "Farm Level Fertilizer Demand for Mexican Wheat Varieties in the Indian Punjab", *American Journal of Agricultural Economics*, 51 (3): 554-558.
- Sidhu, S. S. Baanante, C. A.* (1981) "Estimating Farm Level Input Demand and Wheat Supply in the Indian Punjab Using a Translog Profit Function", *American Journal of Agricultural Economics*, 63 (2): 237-246.
- Shumway, C. R.* (1983) "Supply, Demand, and Technology in a Multiproduct Industry: Texas Field Crops", *Amer. J. Agr. Econ.*, 65: 748-760.
- Vlachou, A. S. and Samouilidis, E. J.* (1986) "Interfuel Substitution: Results from Several Sectors of the Greek Economy", *Energy Economics*, Jan. 1986, Vol. 8, No. 1, pp. 39-45.
- Weaver, R. D.* (1983) "Multiple Input, Multiple Output Production Choices and Technology in the U.S. Wheat Region", *Amer. J. Agr. Econ.* 65 (Feb. 1983): 45-56.
- Yotopoulos, P. A. and Lau, L. J.* (1973) "A Test for Relative Efficiency: Some Further Results", *Amer. Econ. Rev.* 63 (March 1973): 214-223.
- Yotopoulos, P. A. and Lau, L. J.* (eds) (1979) "Resource Use in Agriculture: Applications of the Profit Function to Selected Countries", *Food Research Institute Studies*, Vol. XVII, No. 1, pp. 1-120.
- Yotopoulos, P. A., Lau, L. J., Lin, W. L.* (1976) "Microeconomic Output Supply and Factor Demand Functions in the Agriculture of the Province of Taiwan", *American Journal of Agricultural Economics*, (2): 333-339.